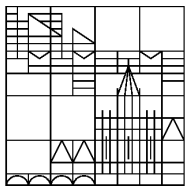
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2014
Dr. D.K. Huynh



Blatt 3

Aufgabe 12
Es seien H_1, H_2 Untergruppen der Gruppe G. Beweisen oder widerlegen Sie: $H_1 \cap H_2$ ist eine Untergruppe von G.

Aufgabe 13
Sei $I = \{f \in \mathbb{Q}[X] : f(\sqrt{5}) = 0\}$. Zeigen Sie, dass I ein Ideal von $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 14
Sei I ein Ideal des Ringes R. Zeigen Sie, dass die Multiplikation in R/I gegeben durch

$$(x + I) \cdot (y + I) := (x \cdot y) + I$$

wohl-definiert ist.

Aufgabe 15
Es sei $K := \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\overline{1}^{(X^2+1)} = \Bigg\{ \sum_{k=0}^{m} a_k (-1)^k X^{2k} + \sum_{k=0}^{m} b_k (-1)^k X^{2k+1} \Bigg| \; m \in \mathbb{N}_0, a_k, b_k \in \mathbb{Q}, 0 \leq k \leq m, \sum_{k=0}^{m} a_k = 1, \sum_{k=0}^{m} b_k = 0 \Bigg\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass K ein Körper mit imaginärer Einheit ist.

Aufgabe 16
Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $K_c := \mathbb{R}[X]/(X^2 + c)$. Zeigen Sie, dass K_c genau dann ein Körper ist, wenn $c > 0$ ist.