Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2015
D. Huynh

Blatt 4

Aufgabe 20

Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 > 0 \text{ und } a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \text{ für } n = 0, 1, 2 \ldots$$

Zeigen Sie, dass für beliebiges $a_0 > 0$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 21

Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 22

Am Anfang eines 10m langen Gummibandes sitzt eine Schnecke. Jeden Tag kriecht sie einen Meter voran. Nachts, wenn sie ruht, dehnt ein Dämon das Band gleichmäßig so aus, dass es jedes Mal um 10m länger wird. Dämon und Schnecke seien unsterblich, das Band unbegrenzt dehnbar. Erreicht die Schnecke jemals das Ende des Bandes? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 23

Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{x}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{x - j + 1}{j}.$$

Wir setzen

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n}.$$

Zeigen Sie

(a) Für $x \geq 1$ konvergiert $s(x)$ absolut. (b) Für $x, y \geq 1$ gilt $s(x + y) = s(x)s(y)$.

Aufgabe 24

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ konvergiert, aber ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst nicht konvergiert.

Aufgabe 25

Zeigen Sie: Die Reihe $\sum a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn ihre Glieder in der Form

$$a_k = b_k - c_k$$

geschrieben werden können, wobei die b_k und c_k alle nicht-negativ und $\sum b_k$ und $\sum c_k$ konvergente Reihen sind.