Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2015
D. Huynh

Blatt 6

Aufgabe 31

(a) Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$. Zeigen Sie:

$$\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b} < \sqrt[k]{a-b}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) und zeigen Sie:
Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \sqrt[k]{x}$$

ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 32

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann ist f auch stetig.

Aufgabe 33

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 34

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es eine Konstante L gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \text{ für } x, y \in D.$$

Zeigen Sie, dass $g : [0, \infty) \to, x \mapsto \sqrt[3]{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 35

Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x^2}$. Gegen welche Funktion f konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

Aufgabe 36

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

konvergiere für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Reihe dann gleichmäßig auf dem Intervall $[x_0, \infty)$ konvergiert.

Zusatzaufgabe 1

Zeigen Sie: Ist A eine Menge, $B_i \subset A$ für jedes $i \in I$ und $B \subset A$, dann gilt

(a) $A \backslash \big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} \big(A \backslash B_i\big)$ (b) $A \backslash \big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} \big(A \backslash B_i\big)$

(c) $B \cap \big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} \big(B \cap B_i\big)$ (d) $B \cup \big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} \big(B \cup B_i\big)$

Zusatzaufgabe 2

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie: Sind $A_i \subset A$ und $B_i \subset B$ Teilmengen $(i \in I)$, dann gilt

(a) $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ (b) $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(c) $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ (d) $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

(e) $f : A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn für alle $E, F \subset A$ gilt $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$.

(f) $f : A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn für alle $E \subset A$ gilt $f(A \backslash E) = B \backslash f(E)$.

Zeigen Sie, dass für Teilmengen $E \subset A$ und $F \subset B$ gilt:

(g) $E \subset f^{-1}(f(E))$; $\quad E = f^{-1}(f(E)) \ \ \forall E \subset A \Leftrightarrow f$ injektiv.

(h) $f(f^{-1}(F)) \subset F$; $\quad f(f^{-1}(F)) = F \ \ \forall F \subset B \Leftrightarrow f$ surjektiv.