



Blatt 2

Aufgabe 9

Gegeben seien zwei Körper $K = (K, +_K, \cdot_K)$ und $L = (L, +_L, \cdot_L)$. Eine Abbildung $\varphi : K \rightarrow L$ heißt Körperhomomorphismus, falls gilt

- (i) $\varphi(0_K) = 0_L$ und $\varphi(1_K) = 1_L$
- (ii) $\varphi(x +_K y) = \varphi(x) +_L \varphi(y)$
- (iii) $\varphi(x \cdot_K y) = \varphi(x) \cdot_L \varphi(y)$.

Zeigen Sie, dass jeder Körperhomomorphismus injektiv ist.

Aufgabe 10

Es sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K -Vektorräumen. Zeigen Sie

- (a) $\text{Im}\varphi$ ist ein Untervektorraum von W .
- (b) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$.

Aufgabe 11

Welche der folgenden Teilmengen des \mathbb{Q}^3 sind Untervektorräume:

- (a) $M_1 = \{(x, y, z) \mid xy - z = 0\}$
- (b) $M_2 = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
- (c) $M_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^4 = 0\}$
- (d) $M_4 = \{(x, y, z) \mid x + 2y = 3z\}$?

Begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Antworten.

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass die Menge V aller konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} mit den Operationen

$$\begin{aligned}(x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n) \\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

einen reellen Vektorraum bildet. Was ist seine Dimension? Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$, die der Folge (x_n) ihren Grenzwert zuordnet, linear ist. Was ist $\ker \varphi$?

Aufgabe 13

Es seien $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (2, 1, 0)$.

- (a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.
- (b) Sei $w = (5, 1, -1)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten von w bezüglich dieser Basis.

(c) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(v_1) = (1, 1), \varphi(v_2) = 0, \varphi(v_3) = (-1, 2).$$

Bestimmen Sie $\varphi(w)$.

Aufgabe 14

Beweisen Sie die Dimensionsformel: Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K -Vektorräumen und $\dim V < \infty$. Dann gilt

$$\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \ker\varphi = \dim V.$$