



Blatt 3

Aufgabe 15

Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16

Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper \mathbb{F}_2 . Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow V$$

sei gegeben durch

$$\varphi((1, 0, 0)) = (1, 1, 1), \quad \varphi((0, 1, 0)) = (0, 1, 1), \quad \varphi((0, 0, 1)) = (1, 0, 0).$$

- (a) Geben Sie Basen von $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Im}(\varphi)$ an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim \ker \varphi + \dim \text{Im} \varphi = \dim V.$$

- (b) Berechnen Sie die Verkettung $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Welche Dimension haben Kern und Bild von ψ ? Wie sieht φ^3 aus?

Aufgabe 17

Die Menge $\{(1, 3), (2, 1), (4, 7)\} \subset \mathbb{R}^2$ bildet ein Erzeugendensystem des \mathbb{R}^2 .

- (a) Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi((1, 3)) = (-2, -1), \quad \varphi((2, 1)) = (-6, -3), \quad \varphi((4, 7)) = (-10, -5).$$

indem Sie $\varphi((x, y))$ für ein beliebiges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ angeben.

- (b) Bestimmen Sie Bild und Kern von φ , indem Sie für beide Unterräume Basen angeben. Was ist $\ker \varphi \cap \text{Im} \varphi$?

Aufgabe 18

Es seien

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen des \mathbb{R}^3 .

- (a) Es sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinatenvektor

$$v_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis \mathcal{A} . Welche Koordinaten hat v bezüglich der Basis \mathcal{B} ?

(b) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen. Wie lautet die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ bezüglich der Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} ?