Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2015
D. Huynh

Blatt 4

Aufgabe 19

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 20

Für ein n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Vandermonde Matrix definiert als

$$V(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\det V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 21

Es sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Vorgelegt sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b.$$

Wir setzen voraus, dass $\det(A) \neq 0$ gilt.

(a) Was gilt für die Lösbarkeit des LGS?

(b) Ist A invertierbar?

(c) Bilden die Spaltenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$?

(d) Welchen Rang hat A?

Wie lauten die Antworten, wenn $\det(A) = 0$ gilt?

Aufgabe 22

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, ausgehend von den Eigenschaften D1 (Linearität), D2 (Alterniertheit) und D3 (Normiertheit) der Determinantenfunktion

$$\det : M_{n \times n}(K) \to K,$$

dass diese auch die Eigenschaften D4, D5, D7, D8, D9 und D11 besitzt.

Aufgabe 23

Die Permanente einer Matrix $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n \in M_{n\times n}(K)$ über einem kommutativen Ring K definiert man durch

$$\operatorname{perm}(A) := \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Permanente verhält sich genauso wie die Determinante linear in den Zeilen einer Matrix (wenn man die restlichen Zeilen festhält).

(b) Die Permanente einer Matrix mit zwei identischen Zeilen ist Null.

(c) Die Permanente einer Matrix, die eine Nullzeile enthält, ist Null.

(d) Die Permanente einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.

(e) Entsteht B aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile $(i \neq j)$, so ist $\operatorname{perm}(A) = \operatorname{perm}(B)$.

(f) Entsteht B aus A durch Ersetzen der j-ten Zeile durch das λ-fache der j-ten Zeile, so gilt $\operatorname{perm}(A) = \frac{1}{\lambda}\operatorname{perm}(B)$.

(g) Ensteht B aus A durch Zeilenvertauschung, so gilt $\operatorname{perm}(A) = \operatorname{perm}(B)$.

(h) Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt: A invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{perm}(A) \in K^\times$

(i) Es gelte $A \approx B$. Dann gilt: $\operatorname{perm}(A) = \operatorname{perm}(B)$.

(j) Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt: $\operatorname{perm}(A) = \operatorname{perm}(A^T)$.