Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2015
D. Huynh

Blatt 5

Aufgabe 24

Sei $G := \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ mit der Addition und $N = \{0, 3\} < G$ eine Untergruppe von G. Listen Sie alle Elemente von G/N auf.

Aufgabe 25

Es sei $\mathbb{C}^\times$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen. Ferner sei $C \leq \mathbb{C}^\times$ die Kreisgruppe, d.h.

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Zeigen Sie

(a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$.

(b) Es gibt eine Untergruppe von C, die isomorph zu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist.

(c) $\mathbb{C}^\times/C \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, die Gruppe der positiven reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Multiplikation.

Aufgabe 26

Es seien M, N Normalteiler der Gruppe G mit $G = MN$. Zeigen Sie $G/(M \cap N) \cong (G/M) \times (G/N)$.

Aufgabe 27

(a) Formulieren Sie den Homomorphiesatz für Ringe.

(b) Sei $I = \{f \in \mathbb{Q}[X] : f(\sqrt{5}) = 0\}$. Zeigen Sie, dass I ein Ideal von $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(c) Sei I das durch das Polynom $X^2 + 1$ erzeugte Ideal im Polynomring $\mathbb{R}[X]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbb{R}[X]/I \cong \mathbb{C}.$$