



## Blatt 2

### Aufgabe 9

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge mit

$$|a_n - a_{n+1}| \leq 2^{-n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.

### Aufgabe 10

Die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien gegeben durch

$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3 - 1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}.$$

Prüfen Sie die Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz bzw. Divergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz.

### Aufgabe 11

Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und beweisen Sie Ihre Antwort:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n5^n}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}}$

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + b^n}$  mit  $0 < b < 1 < a$

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2016}\sqrt{n+611}}$

### Aufgabe 12

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

### Aufgabe 13

Zeigen Sie für  $s \in \mathbb{Q}$ , dass die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für  $s > 1$  und divergiert für  $s \leq 1$ .