Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2016
Dr. Huynh

Blatt 4

Aufgabe 18
Beweisen Sie das Wurzelkriterium: Es sei $q := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Für die Reihe $\sum_n a_n$ gilt:

(i) Falls $q < 1$ gilt, so konvergiert die Reihe absolut.

(ii) Falls $q > 1$ gilt, so divergiert die Reihe.

Aufgabe 19
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geq 1}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$$

Aufgabe 20
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{falls } x \neq 2 \\ A, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Aufgabe 21
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^7$. Zeigen Sie mittels ε-δ-Definition, dass f überall stetig ist.

Aufgabe 22
Die Funktion f sei stetig in $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $|f|$ stetig in a ist. Folgern Sie hieraus: Es seien f und g stetig in a. Dann sind auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ stetig in a.

Aufgabe 23
Beweisen Sie mittels Folgenkriterium der Stetigkeit, dass die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

nirgends stetig ist.

Aufgabe 24
Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt:

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^4 + 1}} = x.$$