Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2016
Dr. Huynh

Blatt 5

Aufgabe 25

(a) Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$. Zeigen Sie:

$$\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b} < \sqrt[k]{a-b}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) und zeigen Sie:
Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \sqrt[k]{x}$$

ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 26

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann ist f auch stetig.

Aufgabe 27

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 28

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es eine Konstante L gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \text{ für } x, y \in D.$$

Zeigen Sie, dass $g : [0, \infty) \to, x \mapsto \sqrt[3]{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 29

Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x^2}$. Gegen welche Funktion f konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

Aufgabe 30

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

konvergiere für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Reihe dann gleichmäßig auf dem Intervall $[x_0, \infty)$ konvergiert.