Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2016
Dr. Huynh

Blatt 6

Aufgabe 31
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A$ eine Folge, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, so liegt x schon in A.

Aufgabe 32
Sei d_1 die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$ und $d_2(x, y) := |x^3 - y^3|$. Zeigen Sie, dass die identische Abbildung von $(\mathbb{R}, d_1)$ nach $(\mathbb{R}, d_2)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 33
Auf $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sei $\{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ die Topologie und auf $Y := \{A, B\}$ sei die Topologie $\{\emptyset, Y, \{A\}\}$. Bestimmen Sie alle stetigen Abbildungen von X nach Y.

Aufgabe 34
Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen

(a) $f(x) = x^2 \sin(x)$ (b) $\log(f(x))$ (c) $\exp(\sin(x^2 + 4))$

(d) $\dfrac{x^3 + 1}{2016x^{2016}}$ (e) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}, x \neq 0$

Aufgabe 35
Bestimmen Sie für $a > 0$ die Grenzwerte der folgenden Funktionen

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1 + ax)}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos(\tfrac{a}{x})\right)^{x^2}$.

Aufgabe 36
Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie Produktregel der Differentiation, d.h.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Aufgabe 37
Es sei $x > 0$. Bestimmen Sie die erste Ableitung von x^x.

Aufgabe 38
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die erste Ableitung. Ist $f'(x)$ stetig?

Aufgabe 39
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig in a ist.