Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2016
D. Huynh

Blatt 1

Aufgabe 1
Gegeben seien zwei Körper $K = (K, +_K, \cdot_K)$ und $L = (L, +_L, \cdot_L)$. Eine Abbildung $\varphi : K \to L$ heißt Körperhomomorphismus, falls gilt

(a) $\varphi(0_K) = 0_L$ und $\varphi(1_K) = 1_L$

(b) $\varphi(x +_K y) = \varphi(x) +_L \varphi(y)$

(c) $\varphi(x \cdot_K y) = \varphi(x) \cdot_L \varphi(y)$.

Zeigen Sie, dass jeder Körperhomomorphismus injektiv ist.

Aufgabe 2
Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie

(a) $\mathrm{Im}\varphi$ ist ein Untervektorraum von W.

(b) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$.

Aufgabe 3
Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}^3$ sind Untervektorräume:

(a) $M_1 = \{(x, y, z)|xy - z = 0\}$

(b) $M_2 = \{(x, y, z)|x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

(c) $M_3 = \{(x, y, z)|x^2 + y^4 = 0\}$

(d) $M_4 = \{(x, y, z)|x + 2y = 3z\}$?

Begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Antworten.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Menge V aller konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit den Operationen

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_n) = (\lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}$$

einen reellen Vektorraum bildet. Was ist seine Dimension? Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$, die der Folge (x_n) ihren Grenzwert zuordnet, linear ist. Was ist $\ker \varphi$?

Aufgabe 5
Es seien $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 1, 0)$.

(a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Sei $w = (5, 1, -1)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten von w bezüglich dieser Basis.

(c) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(v_1) = (1,1), \varphi(v_2) = 0, \varphi(v_3) = (-1,2).$$

Bestimmen Sie $\varphi(w)$.

Aufgabe 6

Beweisen Sie die Dimensionsformel: Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $\dim V < \infty$. Dann gilt

$$\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \ker\varphi = \dim V.$$