Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2016
D. Huynh

Blatt 3

Aufgabe 11
Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektoraum, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

(b) $U_1 + U_2 := \{x + y | x \in U_1, y \in U_2\}$ ist ein Untervektorraum von V.

(c) Für Untervektorräume U, U' von V gilt

- $U + U = U$
- $U + \{0\} = U$
- $U \subseteq U + U'$
- $U + U' = U \Leftrightarrow U' \subseteq U$.

Aufgabe 12
Entscheiden Sie, ob jeweils $\mathbb{R}^2$ die direkte Summe der folgenden W_1 und W_2 ist:

(a) $W_1 = \mathbb{R}^2$ und $W_2 = \{0\}$

(b) $W_1 = W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \,|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \,|\, x \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \,|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ \frac{11}{10}s \end{pmatrix} \,|\, s \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,|\, y \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 13
Bestimmen Sie ein Komplement U' zum Untervektorraum

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 14
Es seien V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum und $v, v' \in V$. Zeigen Sie

(a) $v + U = v' + U \Leftrightarrow v - v' \in U$.

(b) Die Skalarmultiplikation des Quotientenvektorraums V/U gegeben durch

$$\begin{aligned} K \times V/U &\to V/U \\ \alpha(v + U) &\mapsto \alpha v + U \end{aligned}$$

ist wohldefiniert.

bitte wenden

Aufgabe 15

Es seien V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und U ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_U : V &\to V/U \\ v &\mapsto v + U \end{aligned}$$

linear ist. Was ist $\ker \pi_U$? Was ist $\dim V/U$?