Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2016
D. Huynh

Blatt 4

Aufgabe 16
Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Vektorräume

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Tipp: Wählen Sie einen geeigneten Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und wählen Sie eine geeignete lineare Abbildung.

Aufgabe 17
Es sei

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R}, a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

ausgestattet mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation. Ferner sei

$$\varphi : (G, \cdot) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto ac.$$

Zeigen Sie:

(a) φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) φ ist surjektiv.

(c) $G/\ker\varphi \cong \mathbb{R}^\times$.

Tipp: Verwenden Sie bei 17(c) den Homomorphiesatz für Gruppen.

Aufgabe 18
Es sei $\mathbb{C}^\times$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen. Ferner sei $C \leq \mathbb{C}^\times$ die Kreisgruppe, d.h.

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Zeigen Sie

(a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$.

(b) Es gibt eine Untergruppe von C, die isomorph zu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist.

(c) $\mathbb{C}^\times/C \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, die Gruppe der positiven reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Multiplikation.

Tipp: Verwenden Sie, dass der Rand des Einheitskreises durch $\exp(i\varphi)$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ beschrieben wird.