Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2016
D. Huynh

## Blatt 5

### Aufgabe 19

Es sei $K$ ein Körper. Zeigen Sie: Die linearen Funktionale $K^n \to K$ sind genau die Abbildungen

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

mit $c_j \in K$.

**Lösung**.

Wir zeigen zunächst, dass jede Abbildung $f : K^n \to K$ von der Gestalt

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c_j \in K \tag{1}$$

ein lineares Funktional ist. Dazu zeigen wir, dass solche $f$ linear sind. Sei $\alpha \in K$. Dann ist offenbar

$$f(\alpha x + y) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha x_j + y_j) = \alpha \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = \alpha f(x) + f(y).$$

Also ist $f$ linear.

Nun zeigen wir, dass jedes lineare Funktional, die obige Gestalt (1) hat. Es sei $V = K^n$. Offenbar ist $(b_1, \dots, b_n)$ mit $b_j(x) := x_j, j = 1, \dots, n$ eine Basis von $V^*$: Es gilt $\dim V = \dim V^*$ und $(b_1, \dots, b_n)$ sind linear unabhängig. Je $n$ linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis. Somit lässt sich jedes lineare Funktional $f$ als Linearkombination von $(b_1, \dots, b_n)$ schreiben, also

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

dies war zu zeigen.

### Aufgabe 20

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $V^*$ sein Dualraum. Ferner sei $S \subseteq V$. Zeigen Sie, dass der Annihilator $S^0$ von $S$ ein Unterraum von $V^*$ ist.

**Lösung**.

Wir müssen lediglich zeigen, dass $S^0$ nicht-leer und abgeschlossen ist bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation. Diese Aussagen sind aber trivial. Offenbar ist die Nullbildung in $S^0$ enthalten. Also ist $S^0$ nicht-leer. Nach Definition ist

$$S^0 = \{f \in V^* | f(\alpha) = 0 \forall \alpha \in S\}.$$

Es seien $f, g \in S^0$, dann gilt für $h := f + g$ das folgende: Sei $\alpha \in S$. Wir haben dann

$$h(\alpha) = (f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) = 0 + 0 = 0,$$

d.h. $h \in S^0$, also ist $S^0$ abgeschlossen gegenüber Addition.

Es seien nun $\lambda \in K$ und $\alpha \in S$. Dann gilt $(\lambda f)(\alpha) = \lambda f(\alpha) = \lambda \cdot 0 = 0$, also ist auch $(\lambda f) \in S^0$, demnach ist $S^0$ abgeschlossen gegenüber Skalarmultiplikation.

**Aufgabe 21**
Es sei $W = \operatorname{span}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ ein Unterraum von $\mathbb{Q}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Annihilators $W^0$ von $W$.
**Lösung**.
Wir setzen $V = \mathbb{Q}^3$. Nach Aufgabe 19 hat jedes Funktional $f \in V^*$ die Gestalt

$$f(x) = \sum_{j=1}^{3} c_j x_j \text{ mit } c_j \in \mathbb{Q}.$$

Nun gilt

$$f \in W^0 \Leftrightarrow f((1,1,0)) = c_1 + c_2 = 0 \wedge f((1,0,1)) = c_1 + c_3 = 0.$$

Demnach ist beispielsweise $c_1$ frei wählbar und es gilt $c_2 = c_3 = -c_1$. Wir wählen $c_1 = -1$. Dann ist $c_2 = c_3 = 1$. Mithin ist $f(x) = -x_1 + x_2 + x_3$ eine Basis von $W^0$.