Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2017
D. Huynh

Kommentare zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 6

Zu (c): Der Raum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4 ist 5-dimensional und nicht 4-dimensional: Oft werden hier die absoluten Glieder vergessen.

Zu (d): Der Kern der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, mit $(x_1, \ldots, x_5) \mapsto x_1 + x_2 + \ldots + x_5$ ist 4-dimensional und damit isomorph zu $\mathbb{R}^4$: Die Bedingung $\varphi((x_1, \ldots, x_5)) = 0$ ist äquivalent zu $x_1 = -(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$. Die vier Variablen der rechten Seite sind frei wählbar. Daher ist die Dimension des Kerns gleich 4.

Aufgabe 7

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ beschrieben durch die Matrix $M_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Gesucht ist $M_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$, wobei $w_1 = 3v_1 + 2v_2$ und $w_2 = 4v_1 + 3v_2$. Die Situation wird durch das folgende Diagramm beschrieben

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "M_{\mathcal{B}}"'] & V_{\mathcal{A}} \arrow[d, "M_{\mathcal{A}}"] \\ V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}"'] & V_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

Damit gilt also

$$M_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Wir ermitteln nun $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Diese Matrix ist aber bereits gegeben: Aus den Voraussetzungen erhalten wir

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ und } w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Für die Transformationmatrix $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, die die Koordinaten eines Vektors bezüglich $\mathcal{B}$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{A}$ überführt, gilt mithin

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Invertieren von $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ (wir erinnern an die Formel für die Inverse für eine (2×2)-Matrix) liefert

$$\left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{\det T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$M_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -19 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Das obige Diagramm verallgemeinert die Situation aus der Vorlesung: Wir nehmen keinen Bezug mehr auf die Standardbasis, sondern auf eine beliebige Basis $\mathcal{A}$.

Aufgabe 8
Zur Erinnerung: Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen heißt linear, wenn gilt $\varphi(v + \lambda w) = \varphi(v) + \lambda\varphi(w)$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$.
Zu (c): Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ mit $\varphi(f) = f(1)$ ist linear. Denn wir haben

$$\varphi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$$

für alle $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9
Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V, n \geq 2$. Zu entscheiden ist, welche angegebenen Endomorphismen invertierbar sind. Für diese Aufgabe (und im allgemeinen) ist die folgende Aussage wichtig:

> Die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix M_φ einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen sind die Bilder der Basisvektoren von V.

Zu (a): Aus der Bedingung $\varphi_1(b_k) = (2 - k)b_k, k = 1, \ldots, n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix wie folgt aussieht:

$$M_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \text{\huge 0} \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & 2-n \end{pmatrix}$$

Bis auf die Einträge auf der Hauptdiagonalen sind alle Einträge 0. Ein Eintrag auf der Hauptdiagonalen ist 0. Somit ist die Determinante von M_{φ_1} gleich 0, d.h. die Matrix ist nicht invertierbar, was gleichbedeutend dazu ist, dass φ_1 nicht invertierbar ist.

Zu (b): Aus der Bedingung $\varphi_2(b_k) = b_{k+1}, k = 1, \ldots, n-1$ und $\varphi_2(b_n) = b_2$ folgt, dass die erste Spalte der Darstellungsmatrix mit ihrer n-ten Spalte übereinstimmt. Also hat die Matrix keinen vollen Rang und ist daher nicht invertierbar.

Zu (c): Aus der Bedingung $\varphi_3(b_k) = (2 + k)b_k, k = 1, \ldots, n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix nur Einträge ungleich Null auf der Hauptdiagonalen hat und alle anderen Einträge sind Null. Ihre Determinante ist also ungleich Null, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Zu (d): Aus der Bedingung $\varphi_4(b_k) = b_{k+1}, k = 1, \ldots, n-1$ und $\varphi_4(b_n) = b_1$ folgt, dass die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix linear unabhängig sind, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Zu (e): Aus den Bedingungen $\varphi_5(b_1) = b_2, \varphi_5(b_k) = 3b_k + b_{k+1}, k = 2, \ldots, n-1$ und $\varphi_5(b_n) = b_n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist. Die Einträge der Hauptdiagonalen von oben links nach unten rechts gelesen sind $0, 3, 1, 1 \ldots, 1$. Also ist die Determinante Null und die Matrix ist nicht invertierbar.

Zu (f): Die Bedingungen $\varphi_6(b_1) = b_1$ und $\varphi_6(b_k) = k \cdot b_k - k^2 \cdot b_{k-1}, k = 2, \ldots, n$ liefern eine Darstellungsmatrix, die eine obere Dreiecksmatrix ist. Überdies sind alle Einträge auf der Hauptdiagonalen ungleich Null, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Aufgabe 10

Wir verweisen auf die Vorbemerkung zur Aufgabe 9. Aus den Bedingungen $\varphi(b_i) = 2b_i + b_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1$ und $\varphi(b_n) = b_n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist: Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind 2 bis auf den letzten Eintrag unten rechts – dieser ist 1. (Direkt unterhalb der Hauptdiagonalen sind alle Einträge 1.) Demnach gilt $\det \varphi = 2^{n-1}$.

Aufgabe 11

Diese Aufgabe ist eine Variation der Aufgabe 7. Gegeben sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi((x, y, z)) = (y, 2x - z, x)$. Die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{A}}$ bezüglich einer nicht näher spezifizierten Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ist dann gegeben durch

$$M_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn

$$M_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x - z \\ x \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun $M_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Situation wird durch das folgende Diagramm beschrieben

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{\mathcal{A}} \arrow[r, "T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "M_{\mathcal{A}}"'] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \arrow[d, "M_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^3_{\mathcal{A}} \arrow[r, "T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \end{tikzcd}$$

Es gilt daher

$$M_{\mathcal{B}} = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{A}} \cdot T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}.$$

Die Transformationsmatrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ ist in diesem Fall leicht ermittelt. Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ und } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Invertieren von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ liefert

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$M_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&2&1\\2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

Wir wählen $K=V=W=\mathbb{R}$ und betrachten $f(x)=x$ und $g(x)=-x$. Dann gilt $\dim V=\dim W=1$, $\mathrm{Rang}(f)=1=\mathrm{Rang}(g)$ und $\mathrm{Rang}(f+g)=0$. Dieses Beispiel dient als Nachweis, dass die folgenden Aussagen falsch sind:

(a) $\mathrm{Rang}(f+g)\geq\mathrm{Rang}(f)$
(b) $\mathrm{Rang}(f+g)=\mathrm{Rang}(f)+\mathrm{Rang}(g)$
(d) $\mathrm{Rang}(f+g)\geq\mathrm{Rang}(f)+\mathrm{Rang}(g)$
(e) $\mathrm{Rang}(f+g)\geq\dim W$

Für eine lineare Abbildung $f:V\to W$ gilt, dass $\mathrm{Rang}(f)\leq\dim V$: Die Dimension des Bildraumes kann nicht größer sein als die Dimension des Urbildraumes. Dies gilt natürlich auch für die lineare Abbildung $(f+g):V\to W$, also ist die nachfolgende Aussage wahr:

(f) $\mathrm{Rang}(f+g)\leq\dim V.$

Alternativ können wir auch mit der Dimensionsformel argumentieren: Es gilt

$$\dim V=\dim\ker(f+g)+\mathrm{Rang}(f+g)\Rightarrow\dim V\geq\mathrm{Rang}(f+g).$$

Auch die Aussage (c) ist wahr – es gilt

$$\mathrm{Rang}(f+g)\leq\mathrm{Rang}(f)+\mathrm{Rang}(g).$$

Sei $w\in\mathrm{im}(f+g)$. Dann existiert ein $v\in V$ mit $(f+g)(v)=w$, d.h. $f(v)+g(v)=w$. Es gilt $f(v)\in\mathrm{im}(f)$ und $g(v)\in\mathrm{im}(g)$, d.h. $f(v)$ lässt sich als Linearkombination einer Basis $\mathcal{A}$ von $\mathrm{im}(f)$. Analog lässt sich $g(v)$ als Linearkombination einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{im}(g)$ darstellen. Folglich lässt sich jedes $w\in\mathrm{im}(f+g)$ als Linearkombination aller Vektoren aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellen, d.h. die Basislänge von $\mathrm{im}(f+g)$ ist kleiner oder gleich der Summe der Basislängen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, mit anderen Worten

$$\mathrm{Rang}(f+g)\leq\mathrm{Rang}(f)+\mathrm{Rang}(g).$$

Aufgabe 14
Zu (a), (e) und (f):
Es sei $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mathrm{Rang}(\varphi) = 3$. Dann ist $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijektiv. Daher ist auch $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ bijektiv, d.h. $\mathrm{Rang}(\varphi^2) = 3$. Somit können die Folgen $(3, 2, 2, 1)$ und $(3, 2, 1, 0)$ für $(\mathrm{Rang}(\varphi), \mathrm{Rang}(\varphi^2), \mathrm{Rang}(\varphi^3), \mathrm{Rang}(\varphi^4))$ für kein $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ auftreten. Hingegen kann $(3, 3, 3, 3)$ auftreten (in diesem Fall können wir beispielsweise $\varphi = \mathrm{id}$ wählen).

Zu (b):
Angenommen, $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mathrm{Rang}(\varphi) = 1$, dann ist $\dim \ker \varphi = 2$. Somit ist $\dim \ker \varphi^2 \geq 2$ (denn $\ker \varphi$ liegt stets in $\ker \varphi^2$ (warum gilt das?)), d.h. $\mathrm{Rang}(\varphi^2) \leq 1$. Daher gibt es kein $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $(\mathrm{Rang}(\varphi), \mathrm{Rang}(\varphi^2), \mathrm{Rang}(\varphi^3), \mathrm{Rang}(\varphi^4)) = (1, 2, 1, 0)$.

Zu (c):
Sei $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dann gilt $(\mathrm{Rang}(\varphi), \mathrm{Rang}(\varphi^2), \mathrm{Rang}(\varphi^3), \mathrm{Rang}(\varphi^4)) = (2, 1, 0, 0)$.

Zu (d):
Sei $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, 0, 0)$.
Dann gilt $(\mathrm{Rang}(\varphi), \mathrm{Rang}(\varphi^2), \mathrm{Rang}(\varphi^3), \mathrm{Rang}(\varphi^4)) = (1, 1, 1, 1)$.

Aufgabe 15
Zu (e): Wir betrachten eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Diese Abbildung kann nicht injektiv sein, da der Urbildraum 4-dimensional und der Bildraum höchstens 3-dimensional ist. Also ist die Aussage „f ist injektiv“ stets falsch. Aus einer falschen Aussage können wir *alles* folgern, insbesondere auch, dass $f(x) = (1, 1, 2)$ eine Lösung in $\mathbb{R}^4$ besitzt. Insofern muss (e) als richtige Antwort mitangekreuzt werden. Aber: Betrachten wir hingegen eine lineare Abbildung $\widehat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so kann die Aussage „$\widehat{f}$ ist injektiv“ wahr sein. Diese Bedingung ist dann aber *nicht* hinreichend, dass $\widehat{f}(x) = (1, 1, 2)$ eine Lösung besitzt!

Zu (a): Die Bedingung $\dim \ker f = 2$ bedeutet (mit der Dimensionsformel), dass $\dim \mathrm{im} f = 1$, also ist f nicht surjektiv, d.h. es gibt nicht notwendigerweise ein $x \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) = v$.

Zu (b): Gleiches Argument wie in (a).

Aufgabe 16
Sei $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Hinsichtlich der Standardbasis gilt dann

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 E_{11} + x_2 E_{12} + x_3 E_{21} + x_4 E_{22}. \end{aligned}$$

Ferner gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, dass

$$\gamma_A(X) := AXA^t = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_1 \\ 2x_1 & 4x_1 \end{pmatrix} = x_1 E_{11} + 2x_1 E_{12} + 2x_1 E_{21} + 4x_1 E_{22}.$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \gamma_A(E_{11}) &= 1E_{11} + 2E_{12} + 2E_{21} + 4E_{22} \\ \gamma_A(E_{12}) &= 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \\ \gamma_A(E_{21}) &= 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \\ \gamma_A(E_{22}) &= 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}. \end{aligned}$$

Die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung entsprechen den Bildern der Basisvektoren. Somit ist die gesuchte Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$