



Blatt 1

Aufgabe 1

Zeigen Sie

$$\forall n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ gilt } \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie

$$\forall n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \text{ gilt } \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = \frac{n^n}{n!}.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie

$$\forall n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ gilt } 6 \mid (2n^3 + 3n^2 + n).$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie

$$\forall n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \text{ gilt } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie

$$\forall n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ gilt } \forall x_1, \dots, x_n \text{ mit } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{>0} \text{ gilt } \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Aufgabe 6

Ist der folgende Beweis korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion.

Sei $A(n)$ die Aussage, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe aufweisen.

Induktionsanfang mit $n = 1$:

$A(1)$ ist offensichtlich wahr, denn es gibt ja kein anderes Pferd, das eine andere Farbe haben könnte.

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

Wir nehmen an, es gelte $A(n)$, d.h. in jeder Ansammlung von n Pferden haben alle dieselbe Farbe. Wir müssen zeigen, dass dann auch $A(n+1)$ gilt. Wir betrachten nun eine Ansammlung von $n+1$ Pferden. Wir schicken ein Pferd weg; die verbleibenden n Pferde haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes fort. Die verbleibenden n Pferde haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Da Pferde ihre Farbe nicht ändern, muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe. Nach dem Induktionsprinzip haben alle Pferde dieselbe Farbe. ■