



### Blatt 3

#### Aufgabe 13

(a) Sei  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wie üblich bezeichne  $(-a)$  das additive Inverse von  $a$ . Zeigen Sie  $(-1)^2 = 1$ .

(b) Zeigen Sie, dass es keine  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}.$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt mit

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}.$$

#### Aufgabe 14

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge mit

$$|a_n - a_{n+1}| \leq 2^{-n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.

#### Aufgabe 15

Die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien gegeben durch

$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} \text{ und } b_n = \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2}.$$

Prüfen Sie die Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz bzw. Divergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz.

#### Aufgabe 16

Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und beweisen Sie Ihre Antwort:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n5^n}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + b^n}$  mit  $0 < b < 1 < a$

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1703}\sqrt{n+2017}}$

---

**Aufgabe 17**

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

**Aufgabe 18**

Zeigen Sie für  $s \in \mathbb{Q}$ , dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für  $s > 1$  und divergiert für  $s \leq 1$ .