



Blatt 4

Aufgabe 19 Vervollständigen Sie die Tabelle, indem Sie in die mittlere Spalte die Implikationspfeile „ \Leftarrow “, „ \Rightarrow “ oder den Äquivalenzpfeil „ \Leftrightarrow “ einfügen. Falls keine dieser drei Möglichkeiten zutrifft, markieren Sie die Spalte mit \times .

Es seien a, b Folgen.

$(a \cdot b) : \text{konvergent}$		$a, b : \text{konvergent}$
Reihe(a) : konvergent		$a : \text{Nullfolge}$
$a : \text{konvergent}$		$a : \text{Cauchyfolge}$
$(a + b) : \text{konvergent}$		$(a \cdot b) : \text{konvergent}$
$a : \text{beschränkte Folge}$		$a : \text{konvergent}$
Reihe(a) : konvergent		Reihe($2a$) : konvergent
$0 \leq a \leq b$; Reihe(b) : konvergent		Reihe(a) : konvergent
Reihe(a) : konvergent		Reihe(a) : absolut konvergent

Aufgabe 20

Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 > 0 \text{ und } a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie, dass für beliebiges $a_0 > 0$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen \sqrt{a} konvergiert.

Aufgabe 21

Es sei $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 22

Am Anfang eines 10m langen Gummibandes sitzt eine Schnecke. Jeden Tag kriecht sie einen Meter voran. Nachts, wenn sie ruht, dehnt ein Dämon das Band gleichmäßig so aus, dass es jedes Mal um 10m länger wird. Dämon und Schnecke seien unsterblich, das Band unbegrenzt dehnbar. Erreicht die Schnecke jemals das Ende des Bandes? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 23

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{falls } x \neq 2 \\ A \text{ mit } A \in \mathbb{R}, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$