Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2017
Dr. D. Huynh

Blatt 6

Aufgabe 28

(a) Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$. Zeigen Sie:

$$\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b} < \sqrt[k]{a-b}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) und zeigen Sie:
Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \sqrt[k]{x}$$

ist stetig. Ist g auch gleichmäßig stetig?

Aufgabe 29

Hat die folgende Gleichung

$$\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^4+1}} = x.$$

eine Lösung in $\mathbb{R}$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 30

Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 31

Zeigen Sie, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass $\lim\limits_{x \to 0} \exp(x) = 1$ gilt.

Aufgabe 32

Bestimmen Sie für den maximalen Definitionsbereich die jeweilige Ableitung folgender Funktionen

(a) $f(x) = x^2 \sin(x)$ (b) $\log(f(x))$ (c) $\exp(\sin(x^2+4))$

(d) $\dfrac{x^3+1}{2017x^{2017}}$ (e) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}, x \neq 0$

Aufgabe 33

Geben Sie eine differenzierbare Funktion $L : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ an, so dass $L' = \log$ gilt.