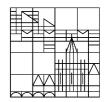
Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik Repetitorium Analysis 2017 Dr. D. Huynh



Blatt 7

Aufgabe 34

Zeigen Sie die Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt } |x+y| \le |x| + |y|.$$

Aufgabe 35

Zeigen Sie: Eine differenzierbare Funktion $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitzstetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist.

Tipp: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 36

Bestimmen Sie für a > 0 die Grenzwerte der folgenden Funktionen

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$
 (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + ax)}{x}$ (c) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

(d)
$$\lim_{x \to \infty} \left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x^2}$$
.

Aufgabe 37

Es seien $f,g:D\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel der Differentiation, d.h.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Aufgabe 38

Es sei x > 0. Bestimmen Sie die erste Ableitung von x^x .

Aufgabe 39

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die erste Ableitung. Ist f'(x) stetig?

Aufgabe 40

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig in a ist.