



Blatt 7

Aufgabe 34

Zeigen Sie die Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt } |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Aufgabe 35

Zeigen Sie: Eine differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist.

Tipp: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 36

Bestimmen Sie für $a > 0$ die Grenzwerte der folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} & \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + ax)}{x} & \text{(c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \\ \text{(d)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{a}{x}\right) \right)^{x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 37

Es seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel der Differentiation, d.h.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Aufgabe 38

Es sei $x > 0$. Bestimmen Sie die erste Ableitung von x^x .

Aufgabe 39

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die erste Ableitung. Ist $f'(x)$ stetig?

Aufgabe 40

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig in a ist.