Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2017
Dr. D. Huynh

Blatt 7 – Lösungen

Vorbemerkung: Beachte, dass $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. In der Literatur wird statt log auch ln verwendet. Der natürliche Logarithmus, als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, ist nur für nicht-negative, reelle Werte definiert und ist differenzierbar (und damit auch stetig). Es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

Aufgabe 34
Zeigen Sie die Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \textbf{ gilt } |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Beweis: Wir führen einen direkten Beweis. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Hieraus folgt

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Ebenso gilt $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$. Hieraus folgt

$$-x - y = -(x+y) \leq |x| + |y|.$$

Aus $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x+y) \leq |x| + |y|$ folgt die Behauptung. ■

Aufgabe 35
Zeigen Sie: Eine differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist.
Tipp: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 36
Bestimmen Sie für $a > 0$ die Grenzwerte der folgenden Funktionen

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+ax)}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos(\frac{a}{x})\right)^{x^2}$.

Lösung.

(a) Wir setzen $f(x) := a^x - 1$ und $g(x) := x$. Dann sind f und g differenzierbar mit $f(0) = g(0) = 0$. Nach den Regeln von l'Hospital folgt aus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$ auch $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Nun gilt $f'(x) = \log(a) \cdot a^x$ und $g'(x) = 1$ und damit $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\log(a)}{1} \to \log(a)$ für $x \to 0$. Mithin gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \log(a)$.

(b) Es sei

$$f(x) := \log(1 + ax) \text{ und } g(x) := x.$$

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{a}{1 + ax} \text{ und } g'(x) = 1.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{a}{1+ax} = a.$$

Mit l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+ax)}{x} = a.$$

(c) Es sei $f(x) := 1-\cos(x)$. Dann gilt $f'(x) = \sin(x)$ und $f''(x) = \cos(x)$. Sei nun $g(x) := x^2$. Dann gilt $g'(x) = 2x$ und $g''(x) = 2$. Also haben wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zweifache Anwendung von l'Hospital liefert

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

(d) Für fest gewähltes $a > 0$ ist $\frac{a}{x} \to 0$ für $x \to \infty$. Für hinreichend großes x ist also $\cos(\frac{a}{x}) > 0$. Somit ist $\cos(\frac{a}{x}) = \exp(\log(\cos(\frac{a}{x}))$ für hinreichend großes x. Also gilt

$$\lim_{x\to\infty}(\cos(\tfrac{a}{x}))^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\exp(x^2\log(\cos\tfrac{a}{x})).$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x\to\infty}\exp(x^2\log(\cos\tfrac{a}{x})) = \exp(\lim_{x\to\infty}x^2\log(\cos\tfrac{a}{x})).$$

Wir analysieren nunmehr

$$\lim_{x\to\infty}x^2\log(\cos\tfrac{a}{x}).$$

Setzen wir $y = \frac{1}{x}$, so gilt

$$\lim_{x\to\infty}x^2\log(\cos(\tfrac{a}{x})) = \lim_{y\to 0}\frac{\log(\cos(ay))}{y^2}.$$

Nun setzen wir

$$f(y) := \log(\cos(ay)),$$

und es gilt

$$f'(y) = \frac{-a\sin(ay)}{\cos(ay)}.$$

Für $g(y) = y^2$ erhalten wir $g'(y) = 2y$. Also gilt

$$\frac{f'(y)}{g'(y)} = \frac{-a\sin(ay)}{2y\cos(ay)}.$$

Mit l'Hospital gilt

$$\begin{aligned}-\frac{a^2}{2} &= \lim_{y\to 0}\frac{-a^2\cos(ay)}{2\cos(ay)-2ya\sin(ay)} = \lim_{y\to 0}\frac{-a\sin(ay)}{2y\cos(ay)} = \lim_{y\to 0}\frac{f'(y)}{g'(y)}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\log(\cos(ay))}{y^2}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos(\tfrac{a}{x})\right)^{x^2} = \exp(-\tfrac{a^2}{2}).$$

Aufgabe 37
Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel der Differentiation, d.h.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Beweis: Im Differenzenquotienten für $(f \cdot g)(x)$ wenden wir den „Nulltrick“ an, indem wir $f(x)g(x+h)$ abziehen und wieder hinzufügen, also

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den ersten Summanden

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h).$$

Da g differenzierbar ist, ist g auch stetig (siehe Aufgabe 40). Also gilt

$$\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x).$$

Nach Voraussetzung ist f differenzierbar, also ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Aus den Grenzwertsätzen folgt daher

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) = f'(x) \cdot g(x).$$

Für den zweiten Summanden gilt

$$\lim_{h \to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x) \cdot g'(x).$$

Wieder mit den Grenzwertsätzen folgt, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = (f \cdot g)'(x)$$

existiert und es gilt

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. ■

Aufgabe 38
Es sei $x > 0$. Bestimmen Sie die erste Ableitung von x^x.
Lösung. Für $x > 0$ ist $x = \exp(\log(x))$. Somit gilt

$$f(x) := x^x = [\exp(\log(x))]^x = \exp(x \log(x)).$$

Wir beachten, dass mit log der natürliche Logarithmus gemeint ist. Die Kettenregel liefert dann (zusammen mit der Produktregel)

$$f'(x) = \exp(x\log(x)) \cdot [\log(x) + \tfrac{1}{x} \cdot x] = x^x(\log(x) + 1).$$

Aufgabe 39
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die erste Ableitung. Ist $f'(x)$ stetig?
Lösung. Für $x \neq 0$ ist f die Komposition differenzierbarer Funktionen und daher differenzierbar. Um zu zeigen, dass f auch in $x = 0$ differenzierbar ist, müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

existiert. Wir haben

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2\cos(\frac{1}{h})}{h} = h\cos(\tfrac{1}{h}).$$

Da $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, gilt

$$0 \leq |h\cos(\tfrac{1}{h})| \leq |h|.$$

Nach dem Sandwich-Lemma folgt daher

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0,$$

d.h. f ist auch in $x = 0$ differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + x^2(-\sin(\tfrac{1}{x}))(-x^{-2}) = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) - \sin(\tfrac{1}{x}).$$

Wir erhalten daher

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

f' ist nicht stetig in 0. Angenommen schon, dann gilt

$$\lim_{x\to 0} 2x\cos(\tfrac{1}{x}) - \sin(\tfrac{1}{x}) = f'(0) = 0,$$

d.h.

$$\lim_{x\to 0} 2x\cos(\tfrac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \sin(\tfrac{1}{x}). \tag{1}$$

Mit dem Sandwich-Lemma folgt für die linke Seite von (1), dass

$$\lim_{x\to 0} 2x\cos(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

Die rechte Seite von (1) existiert aber nicht, da $\sin(\frac{1}{x})$ für $x \to 0$ nicht konvergiert.

Aufgabe 40
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig in a ist.

Beweis. Wir führen einen direkten Beweis. Sei f differenzierbar in a. Wir haben dann

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \to f'(a) \cdot 0 \text{ für } x \to a.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0,$$

also

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

d.h. f ist (mit dem Folgenkriterium) stetig in a. ■