Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2017
Dr. D. Huynh

Blatt 2

Aufgabe 6

Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie

(a) $\mathrm{im}\varphi$ ist ein Untervektorraum von W.

(b) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$.

Aufgabe 7

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}^3$ sind Untervektorräume des $\mathbb{Q}^3$?

(a) $M_1 = \{(x, y, z) | xy - z = 0\}$

(b) $M_2 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

(c) $M_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^4 = 0\}$

(d) $M_4 = \{(x, y, z) | x + 2y = 3z\}$?

Weisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antworten nach.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die Menge V aller konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit den Operationen

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_n) = (\lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}$$

einen reellen Vektorraum bildet. Was ist seine Dimension? Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$, die der Folge (x_n) ihren Grenzwert zuordnet, linear ist. Was ist $\ker \varphi$?

Aufgabe 9

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Sei $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten von w bezüglich dieser Basis.

(c) Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi(v_2) = 0, \varphi(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\varphi(w)$.

bitte wenden

Aufgabe 10
Beweisen Sie die Dimensionsformel: Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $\dim V < \infty$. Dann gilt

$$\dim\ \mathrm{im}\varphi + \dim\ \mathrm{ker}\varphi = \dim\ V.$$