Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2017
Dr. D. Huynh

Blatt 4

Aufgabe 16
Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17
Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V$$

sei gegeben durch

$$\varphi((1,0,0)) = (1,1,1), \quad \varphi((0,1,0)) = (0,1,1), \quad \varphi((0,0,1)) = (1,0,0).$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von φ und Basen von $\ker\varphi$ und $\mathrm{im}\varphi$ an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim\ker\varphi + \dim\mathrm{im}\varphi = \dim V.$$

(b) Berechnen Sie die Verkettung $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Welche Dimension haben Kern und Bild von ψ? Wie sieht φ^3 aus?

Aufgabe 18
Die Menge $\{(1,3),(2,1),(4,7)\} \subset \mathbb{R}^2$ bildet ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$.

(a) Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi((1,3)) = (-2,-1), \quad \varphi((2,1)) = (-6,-3), \quad \varphi((4,7)) = (-10,-5).$$

indem Sie $\varphi((x,y))$ für ein beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ angeben.

(b) Bestimmen Sie Bild und Kern von φ, indem Sie für beide Unterräume Basen angeben. Was ist $\ker\varphi \cap \mathrm{im}\varphi$?

Aufgabe 19
Es seien

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen des $\mathbb{R}^3$.

(a) Es sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinatenvektor

$$v_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{A}$. Welche Koordinaten hat v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

(b) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen. Wie lautet die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?