Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2017
Dr. D. Huynh

Blatt 6

Aufgabe 25
Gegeben sei eine Matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie lautet das charakteristische Polynom χ_A von A?

(b) Begründen Sie, warum die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A die Eigenwerte von A sind.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit den dazugehörigen Eigenvektoren.

(d) Für $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gelte $\chi_A = \chi_B$. Gilt dann auch $A = B$?

Aufgabe 26
Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die zugehörige Diagonalmatrix an. Begründen Sie Ihre Antworten.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27
Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(t) \in K[t]$ paarweise verschiedene Nullstellen hat.

Aufgabe 28
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -33 & 14 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^{10} (ohne Computereinsatz).

Aufgabe 29
Es bezeichne V den $\mathbb{R}$-Vektorraum der linearen Polynome. Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung gegeben durch

$$\varphi(ax + b) = 2bx + (a + b).$$

Machen Sie sich klar, dass $\{1, x\}$ eine Basis von V ist und legen Sie diese als Standardbasis zu Grunde.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ und geben Sie jeweils eine Basis für die Eigenräume von φ an.

(b) Entscheiden Sie, ob φ diagonalisierbar ist.