



Blatt 7

Aufgabe 30

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$.
- (b) Ermitteln Sie A^9 mit dem Satz von Cayley Hamilton.

Aufgabe 31

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $q_A(t)$. Zur Erinnerung: Das Minimalpolynom $q_A(t)$ ist das (eindeutig bestimmte) normierte Polynom kleinsten Grades mit der Eigenschaft $q_A(A) = 0 \in M_{n \times n}(K)$.
- (b) Zeigen Sie, dass A nicht diagonalisierbar ist, aber trigonalisierbar.
- (c) Trigonalisieren Sie die Matrix A .

Aufgabe 32

Es sei V ein K -Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4) . Sei $\varphi \in \text{End}(V)$ mit

$$\varphi(v_i) = v_{i+1} \text{ für } i = 1, 2, 3, \varphi(v_4) = v_1.$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_\varphi(\lambda)$ von φ .
- (b) Zeigen Sie: Für $K = \mathbb{R}$ ist φ nicht trigonalisierbar. Für $K = \mathbb{C}$ ist φ diagonalisierbar. Für $K = \mathbb{F}_2$ ist φ trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar.
- (c) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{C}$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von φ .

bitte wenden

Aufgabe 33

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $V \neq 0$, und sei $\varphi \in \text{End } V$. Definiere $\psi \in \text{End } V$ durch

$$\psi := \varphi^9 + \varphi^4.$$

Welche der folgenden Implikationen sind richtig?

- (a) φ injektiv $\Rightarrow \psi$ injektiv
- (b) φ surjektiv $\Rightarrow \psi$ surjektiv
- (c) φ bijektiv $\Rightarrow \psi$ bijektiv
- (d) ψ injektiv $\Rightarrow \varphi$ injektiv
- (e) ψ surjektiv $\Rightarrow \varphi$ surjektiv
- (f) ψ bijektiv $\Rightarrow \varphi$ bijektiv