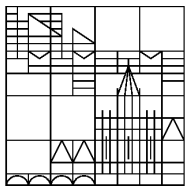
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2017
Dr. D. Huynh



Blatt 8

Aufgabe 34
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Vektorräume

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Tipp: Wählen Sie einen geeigneten Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und wählen Sie eine geeignete lineare Abbildung.

Aufgabe 35
Es sei

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R}, a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

ausgestattet mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation. Ferner sei

$$\begin{aligned} \varphi : (G, \cdot) &\to (\mathbb{R}^\times, \cdot) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} &\mapsto ac. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) φ ist surjektiv.

(c) $G/\ker\varphi \cong \mathbb{R}^\times$.

Tipp: Verwenden Sie bei der Teilaufgabe (c) den Homomorphiesatz für Gruppen.

Zusatzaufgabe 1
Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare, surjektive Abbildung zwischen K-Vektorräumen und ferner $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Eine der folgenden Aussagen ist immer richtig, die andere gilt nicht immer. Geben Sie für die richtige Aussage einen Beweis, für die falsche ein Gegenbeispiel.

(a) $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ ist ein Erzeugendensystem von W.

(b) $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ ist linear unabhängig in W.

Zusatzaufgabe 2
Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $x_1, \ldots, x_r, y \in V$. Ferner gelte $y \notin \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(x_1, \ldots, x_r)$. Zeigen Sie: Ist $(x_1, \ldots, x_r)$ linear unabhängig, so auch $(x_1 + y, \ldots, x_r + y)$.

Zusatzaufgabe 3
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in S_n$. Zeigen Sie, dass $H_\tau := \{\sigma \in S_n : \sigma\tau = \tau\sigma\}$ eine Untergruppe von S_n ist.

bitte wenden

Zusatzaufgabe 4
Sei $V = \{f \in \mathbb{R}[t] : \deg f \leq 2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ genau ein $f \in V$ gibt mit

$$f(1) = a \qquad f'(0) = b \qquad f(0) = c$$

und geben Sie dieses f explizit an.