



Blatt 8 – Lösungen

Aufgabe 34

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Vektorräume

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Tipp: Wählen Sie einen geeigneten Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und wählen Sie eine geeignete lineare Abbildung.

Lösung. Um den Homomorphiesatz anzuwenden, benötigen wir eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\ker \varphi \cong \mathbb{R}^m$ und $\operatorname{im} \varphi \cong \mathbb{R}^{n-m}$.

Als lineare Abbildung wählen wir die Projektion auf $\mathbb{R}^{n-m}$, d.h.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) &\mapsto (\underbrace{0, \dots, 0}_{m\text{-Mal}}, x_{m+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Das Bild hat also Dimension $n-m$, also ist $\operatorname{im} \varphi \cong \mathbb{R}^{n-m}$. Nach der Dimensionsformel ist also $\dim \ker \varphi = m$, also $\ker \varphi \cong \mathbb{R}^m$. Nach dem Homomorphiesatz gilt

$$\mathbb{R}^n / \ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi \Leftrightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Alternativ – die Dimensionsformel für Quotientenvektorräume besagt:

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$$

für einen endlich dimensional K -Vektorraum V mit Untervektorraum $U \subseteq V$. Mit $V = \mathbb{R}^n$ und $U = \mathbb{R}^m$ folgt dann

$$\dim(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathbb{R}^m = \dim \mathbb{R}^{n-m},$$

d.h.

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

□

Aufgabe 35

Es sei

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}, a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

ausgestattet mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation. Ferner sei

$$\begin{aligned} \varphi : (G, \cdot) &\rightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} &\mapsto ac. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (a) φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) φ ist surjektiv.

(c) $G/\ker \varphi \cong \mathbb{R}^\times$.

Tipp: Verwenden Sie bei der Teilaufgabe (c) den Homomorphiesatz für Gruppen.

Lösung.

(a) Der Nachweis erfolgt durch Nachrechnen – es gilt

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix}\right) \\ &= axcz = acxz = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

(b) Sei $y \in \mathbb{R}^\times$. Dann gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = y \cdot 1 = y,$$

also wird jedes $y \in \mathbb{R}^\times$ unter φ getroffen, also φ surjektiv. Somit gilt $\text{im } \varphi = \mathbb{R}^\times$.

(c) Ohne $G/\ker \varphi$ genau zu kennen, wissen wir aufgrund des Homomorphiesatzes, dass

$$G/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi = \mathbb{R}^\times$$

gilt.

Bemerkung: Die Struktur von $G/\ker \varphi$ ist ohne Homomorphiesatz nicht sofort klar. Es gilt

$$\begin{aligned}\ker \varphi &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid ac = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

und

$$G/\ker \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \ker \varphi \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \right\};$$

in dieser Form ist nicht klar, dass $G/\ker \varphi$ isomorph zu $\mathbb{R}^\times$ ist.

Zusatzaufgabe 1

Es sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare, surjektive Abbildung zwischen K -Vektorräumen und ferner $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Eine der folgenden Aussagen ist immer richtig, die andere gilt nicht immer. Geben Sie für die richtige Aussage einen Beweis, für die falsche ein Gegenbeispiel.

(a) $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ ist ein Erzeugendensystem von W .

(b) $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ ist linear unabhängig in W .

Lösung.

(a) Die Aussage ist wahr. Wir müssen zeigen, dass jedes $w \in W$ sich als Linearkombination der $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ schreiben lässt. Sei also $w \in W$. Da φ nach Voraussetzung surjektiv ist, gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Da $(v_1, \dots, v_n)$

eine Basis von V ist, gilt $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$ für geeignete $\lambda_j \in K$ mit $j = 1 \dots, n$.
Die Linearität von φ liefert

$$w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(v_j),$$

dies war zu zeigen.

- (b) Die Aussage gilt nicht immer. Wir geben also ein Beispiel an, so dass $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare, surjektive Abbildung ist, aber $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ linear abhängig in W . Wie finden wir ein solches Beispiel? Wir können $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ wählen. m sollte so klein wie möglich gewählt werden; $m = 1$ kommt nicht in Frage, denn ein Vektor in einem 1-dimensionalen Vektorraum ist immer linear unabhängig. Wir wählen daher $m = 2$. Da 3 Vektoren in einem 2-dimensionalen Vektorraum immer linear abhängig sind, wählen wir $n = 3$. Wir betrachten nun folgende Matrix $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von A ist 2. Die Spaltenvektoren sind linear abhängig. Es sei nun $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Darstellungsmatrix A . Dann ist φ eine surjektive, lineare Abbildung und $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$ ist linear abhängig.

Zusatzaufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum und $x_1, \dots, x_r, y \in V$. Ferner gelte $y \notin \text{span}_{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_r)$. Zeigen Sie: Ist $(x_1, \dots, x_r)$ linear unabhängig, so auch $(x_1 + y, \dots, x_r + y)$.

Beweis. Wir betrachten folgende Nullsumme

$$\lambda_1(x_1 + y) + \dots + \lambda_r(x_r + y) = 0. \quad (1)$$

Wir zeigen, dass dann $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ gilt.

Die Nullsumme (1) leicht umgestellt ergibt

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)y. \quad (2)$$

Nach Voraussetzung ist $y \notin \text{span}_{\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_r)$, d.h. $y \neq 0$. Denn für $y = 0$, wird y durch $x_1, \dots, x_r$ aufgespannt. Deshalb kann (2) nur gelten, wenn ihre rechte Seite 0 ist, d.h. der Koeffizienten $-(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$ von y muss 0 sein. Also folgt aus (2), dass

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = 0.$$

Diese letzte Nullsumme kann nur trivial gebildet werden, da $(x_1, \dots, x_r)$ nach Voraussetzung linear unabhängig ist, d.h. $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, dies war zu zeigen. $\square$

Zusatzaufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in S_n$. Zeigen Sie, dass $H_\tau := \{\sigma \in S_n : \sigma\tau = \tau\sigma\}$ eine Untergruppe von S_n ist.

Beweis. Für den Beweis weisen wir folgende Aussagen nach:

- (i) H_τ ist nicht-leer
- (ii) $\forall \varphi, \pi$ mit $\varphi, \pi \in H_\tau$ gilt $\varphi\pi \in H_\tau$
- (iii) $\forall \varphi$ mit $\varphi \in H_\tau$ gilt $\varphi^{-1} \in H_\tau$

Zu (i): Wegen $\text{id } \tau = \tau \text{id}$ gilt $\text{id} \in H_\tau$, also ist H_τ nicht-leer. $\square$

Zu (ii): Es seien $\varphi, \pi \in H_\tau$. Wir müssen $\varphi\pi \in H_\tau$ zeigen, d.h. $\varphi\pi\tau = \pi\varphi\tau$. Nach Voraussetzung gilt

$$\varphi\tau = \tau\varphi \quad (3)$$

und

$$\pi\tau = \tau\pi. \quad (4)$$

Es gilt

$$\varphi\pi\tau = \varphi(\pi\tau) \stackrel{(4)}{=} \varphi(\tau\pi) = (\varphi\tau)\pi \stackrel{(3)}{=} (\tau\varphi)\pi = \tau\varphi\pi,$$

dies war zu zeigen. $\square$

Zu (iii): Es sei $\varphi \in H_\tau$. Wir müssen zeigen, dass auch $\varphi^{-1} \in H_\tau$ ist, d.h. $\varphi^{-1}\tau = \tau\varphi^{-1}$. Wegen $\varphi \in H_\tau$ gilt

$$\varphi\tau = \tau\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\varphi^{-1}\varphi\tau = \varphi^{-1}\tau\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi^{-1}\tau\varphi \Leftrightarrow \tau\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\tau\varphi\varphi^{-1} \Leftrightarrow \tau\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\tau,$$

dies war zu zeigen. $\square$

Zusatzaufgabe 4

Sei $V = \{f \in \mathbb{R}[t] : \deg f \leq 2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ genau ein $f \in V$ gibt mit

$$f(1) = a \quad f'(0) = b \quad f(0) = c$$

und geben Sie dieses f explizit an.

Lösung. Zu gegebenem $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ müssen wir zeigen, dass es genau ein $f \in V$ gibt mit

$$f(1) = a \quad f'(0) = b \quad f(0) = c.$$

Jedes $f \in V$ ist von der Gestalt

$$f = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \text{ mit } (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Die Bedingungen liefern folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(1) &= a_2 + a_1 + a_0 = a \\ f'(0) &= a_1 = b \\ f(0) &= a_0 = c. \end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right).$$

Die Matrix hat vollen Rang, d.h. es gibt genau eine Lösung. Aus dem LGS lesen wir sofort ab

$$a_2 = a - b - c, \quad a_1 = b, \quad a_0 = c,$$

also gibt es zu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ genau ein $f \in V$ mit den geforderten Eigenschaften, nämlich

$$f = (a - b - c)t^2 + bt + c.$$

$\square$