Aufgabe 16
Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\alpha \in \operatorname{End}(V)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ beschrieben durch die Matrix $M(\alpha, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Es sei $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ eine Basis von V mit $w_1 = 3v_1 + 2v_2$ und $w_2 = 4v_1 + 3v_2$. Geben Sie die Darstellungsmatrix $M(\alpha, \mathcal{B})$ an.
Lösung. Die Situation wird durch das folgende Diagramm beschrieben

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "M(\mathcal{B},\mathcal{A})"] \arrow[d, "M(\alpha,\mathcal{B})"'] & V_{\mathcal{A}} \arrow[d, "M(\alpha,\mathcal{A})"] \\
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "M(\mathcal{B},\mathcal{A})"'] & V_{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

Damit gilt also
$$M(\alpha, \mathcal{B}) = M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cdot M(\alpha, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{B}, \mathcal{A}).$$
Aus $w_1 = 3v_1 + 2v_2$ und $w_2 = 4v_1 + 3v_2$ ergibt sich sofort die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{B}, \mathcal{A})$, die die Koordinaten eines Vektors bezüglich $\mathcal{B}$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{A}$ überführt:
$$M(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Invertieren von $M(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ (siehe (1)) liefert
$$(M(\mathcal{B}, \mathcal{A}))^{-1} = M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\det M(\mathcal{B}, \mathcal{A})} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Somit gilt
$$\begin{aligned} M(\alpha, \mathcal{B}) &= M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cdot M(\alpha, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -19 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Bemerkungen:

- Das obige Diagramm verallgemeinert die Situation aus der Vorlesung: Wir nehmen keinen Bezug mehr auf die Standardbasis, sondern auf eine beliebige Basis $\mathcal{A}$.
- Für eine invertierbare (2×2)-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
gilt
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Aufgabe 17
Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi(x, y, z) := (y, 2x - z, x)$. Was ist die Matrix von φ bezüglich der Basis
$$b_1 = (1, -1, 0), b_2 = (0, -1, 1), b_3 = (0, 0, 1)?$$
Lösung. Diese Aufgabe ist eine Variation der Aufgabe 16. Gegeben sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi((x, y, z)) = (y, 2x - z, x)$. Die Darstellungsmatrix $M(\varphi, \mathcal{A})$ bezüglich einer nicht näher spezifizierten Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ist dann gegeben durch
$$M(\varphi, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn

$$M(\varphi, \mathcal{A}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x - z \\ x \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun $M(\varphi, \mathcal{B})$ mit der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Situation wird durch das folgende Diagramm beschrieben

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{\mathcal{A}} \arrow[r, "M(\mathcal{A},\mathcal{B})"] \arrow[d, "M(\varphi,\mathcal{A})"'] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \arrow[d, "M(\varphi,\mathcal{B})"] \\
\mathbb{R}^3_{\mathcal{A}} \arrow[r, "M(\mathcal{A},\mathcal{B})"'] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}$$

Es gilt daher

$$M(\varphi, \mathcal{B}) = M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cdot M(\varphi, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{B}, \mathcal{A}).$$

Die Basiswechselmatrix $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist in diesem Fall leicht ermittelt. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von $M(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ sind die Vektoren (b_1, b_2, b_3). Es gilt

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$M(\varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ: Wir berechnen die Bilder von b_1, b_2 und b_3, also $\varphi(b_1), \varphi(b_2)$ und $\varphi(b_3)$, und stellen diese als Linearkombination von b_1, b_2 und b_3 dar. Wir erhalten

$$\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \varphi(b_1),$$

zu lösen ist das inhomogene LGS

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Wir führen dieselben Rechenoperationen aus, um geeignete Koeffizienten für $\varphi(b_2)$ und $\varphi(b_3)$ zu finden. Daher können wir die 3 inhomogenen LGSe simultan lösen:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\to\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{\mathrm{III}\to\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\to(-1)\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Ergo

$$M(\varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$