

Aufgabe 30

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Eine $(n \times n)$ -Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(t)$ paarweise verschiedene Nullstellen hat.

Lösung. Die Aussage ist falsch. Wir betrachten als Gegenbeispiel mit $n = 2$ die Einheitsmatrix

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese ist offenbar diagonalisierbar (sie liegt ja bereits in Diagonalform vor) und ihr charakteristisches Polynom ist $\chi_{\mathbb{I}_2}(t) = (t - 1)^2$. Also ist $\lambda = 1$ eine doppelte Nullstelle und die Nullstellen von $\chi_{\mathbb{I}_2}(t)$ sind eben nicht paarweise verschieden. \square