Aufgabe 31
Es sei
$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -33 & 14 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie A^{10} (ohne Computereinsatz).
Lösung.
Falls A diagonalisierbar ist, dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass
$$D = SAS^{-1}$$
mit D in Diagonalgestalt. Daraus folgt
$$A^{10} = S^{-1}D^{10}S.$$
Wir prüfen nun, ob A diagonalisierbar ist. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch
$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -9-t & 4 \\ -33 & 14-t \end{vmatrix} = (-9-t)(14-t) + 4\cdot 33 = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3).$$
Somit sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte von A. Die Matrix A hat also paarweise verschiedene Eigenwerte und ist daher diagonalisierbar. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$ ist der Kern von
$$\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -33 & 12 \end{pmatrix} x,$$
dieser wird aufgespannt durch
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$
Analog erhalten wir den Eigenraum zu $\lambda_2 = 3$ durch Lösen des homogenen Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} -12 & 4 \\ -33 & 11 \end{pmatrix} x = 0.$$
Der Lösungsraum wird aufgespannt durch
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Als Spaltenvektoren von S^{-1} nehmen wir die Basisvektoren der Eigenräume, also
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}.$$
Invertieren liefert
$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}.$$
Damit gilt (wie erwartet)
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = SAS^{-1},$$
und weiter
$$\begin{aligned} A^{10} = S^{-1}D^{10}S &= S^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} S = S^{-1}\begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix} S \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\cdot 2^{12} - 11\cdot 3^{10} & 4\cdot 3^{10} - 2^{12} \\ 33\cdot 2^{10} - 11\cdot 3^{11} & 4\cdot 3^{11} - 11\cdot 2^{10} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
$\square$