Aufgabe 33
Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4). Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\varphi(v_i) = v_{i+1} \text{ für } i = 1, 2, 3, \varphi(v_4) = v_1.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_\varphi(\lambda)$ von φ.

(b) Zeigen Sie: Für $K = \mathbb{R}$ ist φ nicht trigonalisierbar. Für $K = \mathbb{C}$ ist φ diagonalisierbar. Für $K = \mathbb{F}_2$ ist φ trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar.

(c) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{C}$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von φ.

Lösung.

(a) In den Spalten der Darstellungsmatrix stehen die Bilder (der Koordinaten) der Basisvektoren. Mithin erhalten wir

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definitionsgemäß gilt

$$\chi_\varphi(\lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{I}_4).$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Entw. nach 1. Zeile}}{=} (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 1. \end{aligned}$$

Das gesuchte charakteristische Polynom ist also

$$\chi_\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 1.$$

(b) Nach Satz 10.3.9 ist φ genau dann trigonalisierbar, wenn χ_φ (in Linearfaktoren) zerfällt. Es gilt

$$\chi_\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1). \tag{1}$$

- Für $K = \mathbb{R}$ zerfällt χ_φ nicht, da $(\lambda^2 + 1)$ nicht zerfällt, denn $\lambda^2 + 1 = 0$ besitzt in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Somit ist für $K = \mathbb{R}$ die lineare Abbildung φ nicht trigonalisierbar.
- Für $K = \mathbb{C}$ gilt

  $$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i).$$

  In diesem Fall zerfällt χ_φ und hat paarweise verschiedene Nullstellen, d.h. φ ist diagonalisierbar.
- Für $K = \mathbb{F}_2$ gilt $1 = -1$, d.h. $\lambda + 1 = \lambda - 1$. Hier gilt ferner $(\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 1 + 1 + 1^2 = \lambda^2 + 1$. Aus (1) „wird" über $\mathbb{F}_2$ demnach

  $$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)^4.$$

  Also zerfällt χ_φ über $\mathbb{F}_2$, d.h. φ ist trigonalisierbar. Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat algebraische Vielfachheit 4. Die Dimension von $\mathrm{Eig}(\varphi, 1)$ ergibt sich durch Betrachtung von

  $$M - 1 \cdot \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spaltenoperationen $\mathrm{I} \to \mathrm{I} + \mathrm{IV}$ und $\mathrm{IV} \to \mathrm{II} + \mathrm{IV}$ liefern

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Rang von $M - 1 \cdot \mathrm{I}_4$ gleich 3, d.h. $\dim \mathrm{Eig}(\varphi, 1) = 1$, d.h. die geometrische Vielfachheit ist 1. Somit sind geometrische und algebraische Vielfachheit verschieden voneinander, d.h. φ ist über $\mathbb{F}_2$ nicht diagonalisierbar.

(c) Für $\lambda \in \{-1, 1, -i, i\}$ müssen wir jeweils nur einen Eigenvektor w_λ angeben. Hierzu betrachten wir das homogene Gleichungssystem

$$(M - \varphi \cdot \mathrm{I}_4)\mathrm{w}_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab

$$-\lambda w_1 = w_4 \Rightarrow w_1 = \tfrac{1}{\lambda} w_4 (\text{definiert, da } \lambda \neq 0) \tag{2}$$
$$w_1 = \lambda w_2 \tag{3}$$
$$w_2 = \lambda w_3 \tag{4}$$
$$w_3 = \lambda w_4. \tag{5}$$

(5) in (4) liefert $w_2 = \lambda^2 w_4$, dies in (3) liefert $w_1 = \lambda^3 w_4$. Demnach gilt mit (2) $\frac{1}{\lambda} w_4 = \lambda^3 w_4$, also $\lambda^4 = 1$, was keinen Widerspruch darstellt, da $\lambda \in \{-1, 1, -i, i\}$. Es gilt also

$$\mathrm{w}_\lambda = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Eigenbasis für $\mathbb{C}$ daher

$$\mathrm{w}_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{w}_{-\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{w}_\mathrm{i} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$