Aufgabe 34

(a) Begründen Sie, warum die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $A \in K^{n\times n}$ die Eigenwerte von A sind.
Antwort: Per definitionem ist das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ die Determinante der linearen Abbildung $A - t \cdot \mathbb{I}_n$. Ist nun t eine Nullstelle von $\chi_A(t)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - t\mathbb{I}_n) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A - t\mathbb{I}_n) < n \Leftrightarrow \ker(A - t\mathbb{I}_n) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : (A - t\mathbb{I}_n)v = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : Av = tv, \text{ also ist } t \text{ ein Eigenwert von } A.
\end{aligned}$$

(b) Wie ist ein Skalarprodukt auf einen K-Vektorraum definiert?
Antwort: Siehe Skript 11.1.1. Insbesondere ist für $K = \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Für $K = \mathbb{C}$ ist ein Skalarprodukt eine hermitische, positiv definite Sesquilinearform.

(c) Was ist ein unitärer Vektorraum?
Antwort: Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ausgestattet mit einem Skalarprodukt, vgl. Bemerkung 11.1.6 Skript.