Aufgabe 35
Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle , \rangle$ gilt

(a) $\langle x+y, x-y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2$

(b) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

Lösung. Wir können von einem allgemeinen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ausgehen. Zur Erinnerung: Ein Skalarprodukt auf einen $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

(a) **Behauptung**: Es gilt $\langle x+y, x-y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2$.
Beweis: Wir haben

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \Leftrightarrow ||x||^2 = \langle x, x\rangle.$$

Für die rechte Seite der Behauptung gilt damit

$$||x||^2 - ||y||^2 = \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \overset{\text{linear im 2. Argument}}{=} \langle x, x\rangle + \langle y, -y\rangle \overset{\text{linear in beiden Argumenten}}{=} \langle x+y, x-y\rangle.$$

(b) **Behauptung**: Es gilt $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.
Beweis: Wir betrachten die linke Seite der Behauptung: Es gilt

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle &\overset{\text{linear im 1. Argument}}{=} \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &\overset{\text{linear im 2. Argument}}{=} \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\overset{\text{Symmetrie}}{=} \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle, \end{aligned}$$

somit gilt

$$||x+y||^2 = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle. \tag{1}$$

Analog ergibt sich

$$||x-y||^2 = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle. \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) liefert

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$