Aufgabe 36

Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V$$

sei gegeben durch

$$\varphi((1,0,0)) = (1,1,1), \quad \varphi((0,1,0)) = (0,1,1), \quad \varphi((0,0,1)) = (1,0,0).$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von φ und Basen von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Im}(\varphi)$ an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{im}\varphi = \dim V.$$

(b) Berechnen Sie die Verkettung $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Welche Dimension haben Kern und Bild von ψ? Wie sieht φ^3 aus?

Lösung. Die Zeilenvektoren schreiben wir als Spaltenvektoren.

(a) Die Darstellungsmatrix der Abbildung ist gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

denn die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix sind die Bilder der Basisvektoren. Das homogene Gleichungssystem, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0,$$

liefert $x_2 = -x_1$ und $x_3 = -x_1$ mit x_1 frei wählbar in $\mathbb{F}_2$. Wir beachten, dass in $\mathbb{F}_2$ das Inverse zu 1 das Element 1 selbst ist. Somit ist

$$\ker \varphi = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Bild von φ wird von den Spaltenvektoren von M erzeugt. Der dritte Spaltenvektor lässt sich als Summe der ersten beiden schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dabei beachten wir, dass $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$ gilt. Wir können also den dritten Spaltenvektor aus dem Erzeugendensystem streichen. Sind die beiden verbleibenden Spaltenvektoren linear unabhängig, so haben wir eine Basis des Bildes gefunden – dies ist auch der Fall: Die ersten beiden Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Damit gilt

$$\mathrm{im}\varphi = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Insgesamt erhalten wir also $\dim \ker \varphi = 1$ und $\dim \mathrm{im}\varphi = 2$; die Dimensionsformel gilt natürlich auch für diese lineare Abbildung

$$3 = \dim V = \dim \ker \varphi + \dim \mathrm{im}\varphi = 1 + 2.$$

(b) Die Darstellungsmatrix zu ψ ist

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch bei der Berechnung von M^2 ist beachten, dass $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$ gilt. Die Dimension des Bildes entspricht dem Zeilenrang. Dieser ist offenbar 1, also $\dim \psi = 1$. Nach der Dimensionsformel ist $\dim \ker \psi = 2$. Die Darstellungsmatrix zu φ^3 ist

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also entspricht φ^3 der Nullabbildung, d.h. alles wird auf die Null abgebildet, daher ist $\dim \ker \varphi^3 = 3$ und $\dim \mathrm{im} \varphi^3 = 0$. $\square$