Aufgabe 37
Es seien

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen des $\mathbb{R}^3$.

(a) Es sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Welche Koordinaten hat v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

(b) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen. Wie lautet die darstellende Matrix $M(\varphi, \mathcal{B}^{\mathcal{A}})$?

Lösung. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dann beschreibt die Matrix A den Übergang der Basis $\mathcal{A}$ zur Standardbasis und die Matrix B den Übergang der Basis $\mathcal{B}$ zur Standardbasis und wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{\mathcal{A}} \arrow[rr, "M(\mathcal{A},\mathcal{B})"] \arrow[dr, "A"'] & & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \arrow[dl, "B"] \\ & \mathbb{R}^3 & \end{tikzcd}$$

Hieraus ergibt sich die Transformationsmatrix $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, die den Übergang von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ beschreibt und wir erhalten

$$M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = B^{-1} \cdot A.$$

Invertieren von B liefert

$$B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -10 & 11 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -10 & 11 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 13 & 12 \\ 30 & 43 & 32 \\ -15 & -20 & -15 \end{pmatrix}.$$

(a) Es gilt

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 13 & 12 \\ 30 & 43 & 32 \\ -15 & -20 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 31 \\ 191 \\ -90 \end{pmatrix}.$$

(b) Hinsichtlich der darstellenden Matrizen erhalten wir folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{\mathcal{A}} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "M(\varphi,\mathcal{A},\mathcal{B})"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "M(\varphi)"] \\ \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \arrow[r, "B"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Es gilt

$$M(\varphi, \mathcal{A}, \mathcal{B}) = B^{-1} \cdot M(\varphi) \cdot A.$$

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
M(\varphi, \mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -10 & 11 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 124 & 114 \\ 27 & 39 & 34 \\ -15 & -45 & -40 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$