Aufgabe 25
Bestimmen Sie

(a) $\int (4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 17x + 1)dx$ (b) $\int \sum_{k=0}^{n} x^k dx$

(c) $\int x^n \exp(x)dx$ ($n \in \mathbb{N}$ fest) (d) $\int \cos(3x+4)dx$ (e) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$

(f) $\int_1^2 \sin^2(x)dx$ (g) $\int_1^2 \ln(x)dx$ (h) $\int 7^x dx$ (i) $\int_0^\pi \sin(\sqrt{x})dx$

(j) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$ (k) $\int_0^1 \frac{6x}{(x^2+1)^3}dx$ (l) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx$

(m) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+8x+1}{x^2-1}dx.$

- **Vorbemerkung 1**: Bei der Benutzung der Substitutionsregel ist Folgendes zur Leibnizschen Notation des Differentialoperators nützlich: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar, d.h.
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =: f'(x)$$
existiert. Da f auch stetig ist, existiert
$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) =: dy,$$
ebenso existiert natürlich auch
$$\lim_{h\to 0} h = \lim_{h\to 0} (x+h) - x =: dx.$$
Somit gilt
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\text{GWS}}{=} \frac{\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x)}{\lim_{h\to 0} h} = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$
Also gilt
$$dy = f'(x)dx.$$
Wir können also mit dy und dx wie mit reellen Zahlen „rechnen“.
- **Vorbemerkung 2 (logarithmische Ableitung)**: Es $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f > 0$. Dann gilt
$$\ln(f)' = \frac{f'}{f}.$$
Also gilt
$$\int \frac{f'}{f} = \ln(f) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Nun zu den eigentlichen Aufgaben:

(a) Es gilt aufgrund der Linearität des Integrals
$$\int (4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 17x + 1)dx = x^4 + \tfrac{\sqrt{2}}{3}x^3 - \tfrac{17}{2}x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}.$$

(b) Es handelt sich um eine endliche Summe, daher dürfen wir ohne Weiteres gliedweise integrieren, und erhalten
$$\int \sum_{k=0}^{n} x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \int x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, c \in \mathbb{R}.$$

(c) Mit partieller Integration ergibt sich
$$\int x^n \exp(x)dx = x^n \exp(x) - n \int x^{n-1} \exp(x)dx.$$
Erneute partielle Integration liefert
$$\int x^n \exp(x)dx = x^n \exp(x) - nx^{n-1}\exp(x) + n(n-1) \int x^{n-2} \exp(x)dx.$$

Mit jeder weiteren partiellen Integration reduziert sich der Grad des Faktors x^n, induktiv erhalten wir also

$$\int x^n \exp(x) dx = \exp(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} + c.$$

(d) Substitution liefert

$$\int \cos(3x+4) dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot \cos(3x+4) dx = \frac{1}{3} \cdot \sin(u) + c, c \in \mathbb{R}$$

mit $u(x) = 3x + 4$. Also

$$\int \cos(3x+4) dx = \frac{1}{3} \sin(3x+4) + c, c \in \mathbb{R}.$$

(e) Mittels Substitution erhalten wir

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx = \tfrac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx \overset{\text{Substitution}}{=} \tfrac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

(f) Partielle Integration liefert

$$\int \sin(x)\sin(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x)\cos(x) dx.$$

Wir benutzen folgende Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Damit gilt

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x) dx.$$

Daraus folgt

$$2 \int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1 dx,$$

und daher

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Folglich

$$\int_1^2 \sin^2(x) dx = \left[\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}\right]_1^2.$$

(g) Wir wenden partielle Integration an

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x\ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln(x) - x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$\int_1^2 \ln(x) dx = [x\ln(x) - x]_1^2 = 2\ln(2) - (0-1) = 2\ln(2) + 1 = \ln(4) + 1.$$

(h) Wir beachten, dass für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x.$$

Somit gilt

$$\int a^x dx = \tfrac{a^x}{\ln(a)} + c, c \in \mathbb{R},$$

also

$$\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln(7)} + c, c \in \mathbb{R}.$$

(i) Zur Bestimmung von
$$\int_0^\pi \sin(\sqrt{x})dx$$
benutzen wir Substitution: Wir setzen
$$u := \sqrt{x}.$$
Dann gilt
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})' = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{du}{dx}.$$
Wie in der Vorbemerkung 1 ausgeführt, dürfen wir mit dx und du wie mit reellen Zahlen rechnen und wir erhalten
$$dx = 2\sqrt{x}du = 2udu.$$
Wegen $0 \leq x \leq \pi$ folgt $0 = \sqrt{0} \leq u \leq \sqrt{\pi}$ als „neue“ Integrationsgrenzen. Somit gilt
$$\int_0^\pi \sin(\sqrt{x})dx \overset{u:=\sqrt{x}}{=} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(u)2udu = 2\int_0^{\sqrt{\pi}} u\sin(u)du.$$
Mittels partieller Integration erhalten wir weiter
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} u\sin(u)du &= [-u\cos(u)]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} 1(-\cos(u))du = [-u\cos(u)]_0^{\sqrt{\pi}} + \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(u)du \\ &= [-u\cos(u)]_0^{\sqrt{\pi}} + [\sin(u)]_0^{\sqrt{\pi}} = -\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}) + 0 + (\sin(\sqrt{\pi}) - \sin(0)) \\ &= -\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}) + \sin(\sqrt{\pi}).\end{aligned}$$
Insgesamt erhalten wir
$$\int_0^\pi \sin(\sqrt{x})dx = 2\int_0^{\sqrt{\pi}} u\sin(u)du = 2[\sin(\sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi})].$$

(j) Für die Funktion $f(x) := x^2 - 1$ gilt $f(x) > 0$ für $x \in [2,3]$ und ferner $f'(x) = 2x$. Mit der Vorbemerkung zur logarithmischen Ableitung folgt
$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \tfrac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx = \tfrac{1}{2}[\ln(x^2-1)]_2^3 = \tfrac{1}{2}[\ln(8) - \ln(3)] = \ln\left(\sqrt{\tfrac{8}{3}}\right).$$
Alternativ können wir das Integral mittels Substitution bestimmen. Hierzu setzen wir
$$u := x^2 - 1, \text{dann gilt } \frac{du}{dx} = 2x.$$
Dann gilt
$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx = \int_2^3 \frac{1}{u}\left(\frac{1}{2}\frac{du}{dx}\right)dx = \tfrac{1}{2}\int_3^8 \frac{1}{u}du = \tfrac{1}{2}[\ln|u|]_3^8 = \ln\left(\sqrt{\tfrac{8}{3}}\right).$$

(k) Zur Bestimmung von
$$\int_0^1 \frac{6x}{(x^2+1)^3}dx$$
verwenden wir die Substitution $u = x^2 + 1$, dann gilt $\frac{du}{dx} = 2x$. Somit gilt
$$\int_0^1 \frac{6x}{(x^2+1)^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{u^3}\left(3\frac{du}{dx}\right)dx = 3\int_1^2 u^{-3}du = 3\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^2 = -\tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{4}-1) = (-\tfrac{3}{2})(-\tfrac{3}{4}) = \tfrac{9}{8}.$$

(l) Zur Bestimmung von

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx$$

verwenden wir die Substitution $u = \sin(x)$, dann gilt $\frac{du}{dx} = \cos(x)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u}\frac{du}{dx}dx = \int_{\sin(\frac{\pi}{6})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{u}du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{\frac{1}{2}}du = \tfrac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \tfrac{2}{3}\left(1-(\tfrac{1}{2})^{\frac{3}{2}}\right) = \tfrac{2}{3}\left(1-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

(m) Zu bestimmen ist

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+8x+1}{x^2-1}dx.$$

Für den Integranden gilt

$$\frac{x^2+8x+1}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+8x+1+1}{x^2-1} = 1+\frac{8x+2}{x^2-1}.$$

(Diese Darstellung finden wir alternativ mit einer Polynomdivision.) Mittels Partialbruchzerlegung finden wir

$$\frac{8x+2}{x^2-1} = \frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}.$$

Damit gilt mit der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+8x+1}{x^2-1}dx &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}\right)dx \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} 1dx + 5\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1}dx + 3\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x+1}dx \\ &= [x]_0^{\frac{1}{2}} + 5\left[\ln|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} + 3\left[\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= (\tfrac{1}{2}-0)+5(\ln(\tfrac{1}{2})-\underbrace{\ln(1)}_{=0})+3(\ln(\tfrac{3}{2})-\ln(1)) \\ &= \tfrac{1}{2}+5\ln(\tfrac{1}{2})+3\ln(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}+\ln\left((\tfrac{1}{2})^5\cdot(\tfrac{3}{2})^3\right) \\ &= \tfrac{1}{2}+\ln(\tfrac{27}{256}).\end{aligned}$$