Aufgabe 26
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$x \mapsto \int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt.$$

Begründen Sie die Existenz der Ableitung von f und berechnen Sie diese.

Lösung. Da $\exp(t^2)$ die Verkettung stetiger Funktionen ist, ist $\exp(t^2)$ stetig. Nach Teil 1 des Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) ist

$$f(x) = \int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt$$

daher differenzierbar und eine Stammfunktion zu $\exp(\sin^2(x))$. Es sei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x) := \exp(x^2)$. Nach Teil 2 des HDI gilt somit

$$\int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt = G(\sin(x)) - G(4).$$

Differentiation mit der Kettenregel liefert dann die gesuchte Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left[G(\sin(x)) - G(4)\right] = g(\sin(x)) \cdot \sin'(x) = \exp(\sin^2(x)) \cdot \cos(x).$$