Aufgabe 30
Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

$$\text{(a)} \quad \int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx \qquad \text{(b)} \quad \int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx \qquad \text{(c)} \quad \int\limits_{-\infty}^\infty \sin(x)dx.$$

(a) Das erste Integral konvergiert und hat den Wert 1, denn für $R \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\int\limits_0^R \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^R = -\frac{1}{1+R} + 1.$$

Also gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{1}{(1+x)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{1+R}+1\right) = 1,$$

somit gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx = 1.$$

(b) Das zweite Integral divergiert bestimmt gegen ∞: Es gilt

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_\varepsilon^1 = \ln|1| - \ln|\varepsilon| = -\ln|\varepsilon|.$$

Für $|\varepsilon| \to 0$ ist $\ln|\varepsilon|$ streng monoton fallend gegen $-\infty$. Hieraus folgt

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln|\varepsilon|) = \infty.$$

(c) Das dritte Integral ist divergent. Nach Vorlesung (vgl. Kompendium, S. 95) existiert $\int_{\infty}^{\infty} f$, wenn die Integrale $\int_0^\infty f$ und $\int_{-\infty}^0 f$ getrennt existieren. Für $R \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\int\limits_0^R \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^R = -\cos(R) + 1.$$

Aufgrund der Oszillationen des Kosinus zwischen -1 und 1 existiert $\lim\limits_{R\to\infty}(-\cos(R)+1)$ nicht. Folglich existiert

$$\int\limits_0^\infty \sin(x)dx$$

nicht und damit existiert auch

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \sin(x)dx$$

nicht.