Aufgabe 31
Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}((0,\infty),\mathbb{R})$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{n}{x^3}\exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right)$$

auf Konvergenz. Existieren die Integrale $\int_0^\infty f_n(x)dx$? Gilt

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \quad ?$$

Lösung.

- **Behauptung**: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \equiv 0$.
  Beweis: Zur Ermittlung einer möglichen Grenzfunktion von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ bietet es sich an, die folgende Variablensubstitution

  $$y = \tfrac{1}{x}$$

  durchzuführen. Damit gilt

  $$f_n(\tfrac{1}{x}) = f_n(y) = \frac{ny^3}{\exp(\frac{n}{2}y^2)}.$$

  Für festes $y \in (0,\infty)$ gilt $f_n(y) = \frac{ny^3}{\exp(\frac{n}{2}y^2)} \to 0$ für $n\to\infty$ – dies folgt durch Anwendung einer Regel von l'Hospital (vgl. Kompendium, Seite 73, (iv) (2)):

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{n\to\infty}\frac{ny^3}{\exp(\frac{n}{2}y^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{y^3}{\frac{y^2}{2}\exp(\frac{n}{2}y^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{y}{\frac{1}{2}\exp(\frac{n}{2}y^2)} = 0.$$

  Da $y \in (0,\infty)$ beliebig gewählt war, ist die Grenzfunktion von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f \equiv 0$. Damit haben wir gezeigt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise* gegen f konvergiert. Wir zeigen nun, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar *gleichmäßig* gegen f konvergiert, was äquivalent ist zu

  $$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0.$$

  Wir bestimmen daher

  $$||f_n - f||_\infty = ||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in (0,\infty)\}.$$

  Hierzu zeigen wir, dass

  $$x = \sqrt{\tfrac{n}{3}}$$

  eine globale Maximalstelle ist: f_n ist offenbar mindestens zweimal (nach x) differenzierbar und wir erhalten

  $$f_n'(x) = \exp(-\tfrac{n}{2}x^{-2})\frac{-3nx^2+n^2}{x^6} \text{ und } f_n''(x) = \exp(-\tfrac{n}{2}x^{-2})\frac{-9n^2x^2+12nx^4+n^3}{x^9}.$$

  Ferner gilt

  $$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \exp(-\tfrac{n}{2}x^{-2})\frac{-3nx^2+n^2}{x^6} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\tfrac{n}{3}},$$

  also ist $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$ mögliche Extremstelle. Mit

  $$-9n^2\left(\sqrt{\tfrac{n}{3}}\right)^2 + 12n\left(\sqrt{\tfrac{n}{3}}\right)^4 + n^3 = -9n^2\tfrac{n}{3} + 12n\tfrac{n^2}{9} + n^3 = -\tfrac{2}{3}n^3 < 0$$

  folgt $f_n''\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) < 0$. Somit ist $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$ eine Maximalstelle. Um zu zeigen, dass $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$ eine *globale* Maximalstelle ist, untersuchen wir (für festes $n \in \mathbb{N}$) die folgenden Ausdrücke

  $$\lim_{x\to 0} f_n(x) \text{ und } \lim_{x\to\infty} f_n(x).$$

Mit der obigen Substitution $y = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{y\to 0} f_n(y) = \lim_{y\to 0} \frac{ny^3}{\exp(\frac{n}{2}y^2)} \overset{\text{Zähler und Nenner sind stetig}}{=} \frac{n\cdot 0^3}{\exp(\frac{n}{2}\cdot 0^2)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ferner haben wir

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{y\to\infty} f_n(y) = \lim_{y\to\infty} \frac{ny^3}{\exp(\frac{n}{2}y^2)} \overset{\text{de l'Hospital}}{=} 0.$$

Wir haben

$$f_n\left(\sqrt{\tfrac{n}{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}\exp(-3/2)}{\sqrt{n}} > 0,$$

also ist $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$ eine globale Maximalstelle. Dann gilt

$$||f_n||_\infty = f_n\left(\sqrt{\tfrac{n}{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}\exp(-3/2)}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$. $\square$

- **Behauptung**: Die Integrale

$$\int_0^\infty f_n(x)dx$$

existieren und haben Wert 1.
Beweis: Es seien $\varepsilon, R \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon < 1 < R$. Dann gilt

$$\int_\varepsilon^R f_n(x)dx = \int_\varepsilon^1 f_n(x)dx + \int_1^R f_n(x)dx.$$

Mit der Substitutionsregel ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 f_n(x)dx &= \int_\varepsilon^1 \frac{n}{x^3}\exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right)dx \\ &\overset{u(x):=-\frac{n}{2x^2}}{=} \int_{-\frac{n}{2\varepsilon^2}}^{-\frac{n}{2}} \exp(u)du = [\exp(u)]_{-\frac{n}{2\varepsilon^2}}^{-\frac{n}{2}} \\ &= \exp\left(-\frac{n}{2}\right) - \exp\left(-\frac{n}{2\varepsilon^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{n}{2}\right) - \frac{1}{\exp\left(\frac{n}{2\varepsilon^2}\right)} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \exp\left(-\frac{n}{2}\right).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \exp\left(-\frac{n}{2}\right).$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_1^R f_n(x)dx &= \int_1^R \frac{n}{x^3}\exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right)dx \\ &\overset{u(x):=-\frac{n}{2x^2}}{=} \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2R^2}} \exp(u)du = [\exp(u)]_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2R^2}} \\ &= \exp\left(-\frac{n}{2R^2}\right) - \exp\left(-\frac{n}{2}\right) \overset{R\to\infty}{\to} 1 - \exp\left(-\frac{n}{2}\right).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_1^\infty f_n(x)dx = 1 - \exp\left(-\frac{n}{2}\right).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx + \int_1^\infty f_n(x)dx = \exp\left(-\frac{n}{2}\right) + 1 - \exp\left(-\frac{n}{2}\right) = 1.$$

Wir haben also

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx.$$

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, hätten wir Gleichheit erwartet. Der Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung (vgl. Kompendium, Satz 8.28, S. 90) greift hier aber nicht, da dieser nur für Regelfunktionen, d.h. auf beschränkten Intervallen, gilt. $\square$