Aufgabe 33
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\sin((2n+1)x)$$

eine Regelfunktion ist und berechnen Sie

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

Beweis. Für $N\in\mathbb{N}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sei

$$f_N(x):=\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{n!}\sin((2n+1)x).$$

f_N ist die endliche Summe von stetigen Funktionen und damit ist f_N eine stetige Funktion auf einem Kompaktum. Also ist f_N gleichmäßig stetig und daher auch eine Regelfunktion – vgl. Kompendium, S. 83: Es gelten die Inklusionen

$$C^*(I,\mathbb{R})\subset\mathcal{R}(I,\mathbb{R})\subset B(I,\mathbb{R}).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}|f_M(x)-f_N(x)| &= \left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{2n+1}{n!}\sin((2n+1)x)\right|\\ &\overset{\text{Bernoulli:}(2n+1)\leq(1+2)^n=3^n}{\leq}\sum_{n=N+1}^{M}\frac{3^n}{n!}\overset{N,M\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

unabhängig von x, d.h. $(f_N)_N\subset C\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\mathbb{R}\right)$ ist eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm und somit gleichmäßig konvergent gegen f (vgl. Kompendium, S. 55: Definition 7.31). Also ist f der gleichmäßige Limes einer stetigen Funktionenfolge und nach Satz 7.35 selbst stetig. Ferner ist f auf einem Kompaktum definiert, also ist f gleichmäßig stetig und ebenfalls eine Regelfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_N(x)dx &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2n+1)\sin((2n+1)x)dx\\ &\overset{\text{Substitution}}{=}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!}\int\limits_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\sin(s)ds\\ &=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!}\left(\cos(0)-\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

und mit dem Satz über Vertauschbarkeit von Grenzprozessen (Satz 8.28) folgt:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{N\to\infty}f_N(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f_N(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\exp(1)-1.$$