Aufgabe 34
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2018)^n}{n^n} \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n \qquad \text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(x+3)^n.$$

Geben Sie auch alle $x \in \mathbb{R}$ an für die die Reihen konvergieren.
Lösung.
Vorbemerkung: Gemäß der Definition 9.8 (Kompendium, Seite 105) des Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_n a_n x^n$$

bestimmen wir r mit Hilfe von $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Hierfür ist die Bemerkung 5.31 (Kompendium, Seite 34) hilfreich: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

(a) **Behauptung**: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2018)^n}{n^n}$ hat Konvergenzradius $r = \infty$ und konvergiert damit für alle $x \in \mathbb{R}$.
Beweis: Wir setzen $a_n := \frac{1}{n^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n}$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Mit der Vorbemerkung gilt daher $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Also gilt $r = \infty$ und die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^n}$ konvergiert für alle $y \in \mathbb{R}$. Diese Aussage gilt dann offenbar auch für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2018)^n}{n^n}$. □

(b) **Behauptung**: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n$ hat Konvergenzradius $r = \frac{1}{8}$ und konvergiert nur für $x \in [\frac{15}{8}, \frac{17}{8})$.
Beweis: Wir setzen $b_n := \frac{2^n}{n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \to 2$ für $n \to \infty$ (da $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$). Somit hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} y^n$ den Konvergenzradius $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{2}$. Mithin konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n$ für $|4x-8| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{8}$. Also hat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n$ den Konvergenzradius $\frac{1}{8}$. Wir haben

$$|x-2| < \tfrac{1}{8} \Leftrightarrow -\tfrac{1}{8} < x-2 < \tfrac{1}{8} \Leftrightarrow \tfrac{15}{8} < x < \tfrac{17}{8}.$$

Die Potenzreihe konvergiert somit für $x \in (\frac{15}{8}, \frac{17}{8})$. Ob sie auch an den Endpunkten des Intervalls, also für $x = \frac{15}{8}$ und $x = \frac{17}{8}$, konvergiert, können wir (gemäß Satz 9.9 (iii)) nicht über den Konvergenzradius klären. Hierfür führen wir eine Einzelbetrachtung durch:

- Für $x = \frac{15}{8}$ erhalten wir die Potenzreihe

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{15}{2}-8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

  Dies ist die alternierende harmonische Reihe, die bekanntlich (nach dem Leibnizkriterium) konvergiert.
- Für $x = \frac{17}{8}$ erhalten wir die Potenzreihe

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{17}{2}-8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

  Dies ist die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert.

Insgesamt konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n$ nur für $x \in [\frac{15}{8}, \frac{17}{8})$. □

(c) **Behauptung**: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(x+3)^n$ hat Konvergenzradius $r = 4$ und konvergiert nur für $x \in (-7, 1)$.

Beweis: Wir setzen $c_n := \frac{(-1)^n}{4^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}$ für $n \to \infty$. Somit hat die Reihe den Konvergenzradius $\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = 4$. Die Reihe konvergiert also für

$$|x+3| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+3 < 4 \Leftrightarrow -7 < x < 1.$$

Für $x = -7$ und $x = 1$ sind wieder Einzelbetrachtungen notwendig.

- Für $x = -7$ erhalten wir
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1;$$
diese Reihe divergiert offenbar.
- Für $x = 1$ erhalten wir
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$
Die Folge $(-1)^n$ ist keine Nullfolge. Damit divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Für die Endpunkte des Intervalls $(-7, 1)$ divergieren die entsprechenden Reihen also. Wir erhalten damit die Behauptung. $\square$

Mit diesen Aufgaben haben wir herausgearbeitet, was das Konvergenzverhalten der Potenzreihe

$$\sum_n a_n x^n$$

über das Konvergenzverhalten der Potenzreihe

$$\sum_n a_n (k \cdot x - x_0)^n$$

für feste $k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, x_0 \in \mathbb{R}$ aussagt. Es gilt nämlich: Falls $\sum\limits_n a_n x^n$ den Konvergenzradius r hat, so hat $\sum\limits_n a_n (k \cdot x - x_0)^n$ für feste $k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, x_0 \in \mathbb{R}$ den Konvergenzradius $\frac{r}{k}$.