



## Kommentare zu ausgewählten Aufgaben

### Aufgabe 6

Zu (c): Der Raum aller reellen Polynome vom Grad  $\leq 4$  ist 5-dimensional und nicht 4-dimensional: Oft werden hier die absoluten Glieder vergessen.

Zu (d): Der Kern der linearen Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $(x_1, \dots, x_5) \mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_5$  ist 4-dimensional und damit isomorph zu  $\mathbb{R}^4$ : Die Bedingung  $\varphi((x_1, \dots, x_5)) = 0$  ist äquivalent zu  $x_1 = -(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ . Die vier Variablen der rechten Seite sind frei wählbar. Daher ist die Dimension des Kerns gleich 4.

### Aufgabe 7

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum und  $\alpha \in \text{End}(V)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$  beschrieben durch die Matrix  $M_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Gesucht ist  $M_{\mathcal{B}}$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ , wobei  $w_1 = 3v_1 + 2v_2$  und  $w_2 = 4v_1 + 3v_2$ . Die Situation wird durch das folgende Diagramm beschrieben

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}} & V_{\mathcal{A}} \\ M_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow M_{\mathcal{A}} \\ V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}} & V_{\mathcal{A}} \end{array}$$

Damit gilt also

$$M_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Wir ermitteln nun  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ . Diese Matrix ist aber bereits gegeben: Aus den Voraussetzungen erhalten wir

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Für die Transformationmatrix  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ , die die Koordinaten eines Vektors bezüglich  $\mathcal{B}$  in Koordinaten bezüglich  $\mathcal{A}$  überführt, gilt mithin

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Invertieren von  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$  (wir erinnern an die Formel für die Inverse für eine  $(2 \times 2)$ -Matrix) liefert

$$(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{\det T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$M_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -19 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Das obige Diagramm verallgemeinert die Situation aus der Vorlesung: Wir nehmen keinen Bezug mehr auf die Standardbasis, sondern auf eine beliebige Basis  $\mathcal{A}$ .

### Aufgabe 8

Zur Erinnerung: Eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  zwischen  $K$ -Vektorräumen heißt linear, wenn gilt  $\varphi(v + \lambda w) = \varphi(v) + \lambda\varphi(w)$  für alle  $v, w \in V$  und  $\lambda \in K$ .

Zu (c): Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  mit  $\varphi(f) = f(1)$  ist linear. Denn wir haben

$$\varphi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$$

für alle  $f, g \in \mathbb{R}[x]$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 9

Sei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $V, n \geq 2$ . Zu entscheiden ist, welche angegebenen Endomorphismen invertierbar sind. Für diese Aufgabe (und im allgemeinen) ist die folgende Aussage wichtig:

Die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix  $M_\varphi$  einer linearen Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  zwischen  $K$ -Vektorräumen sind die Bilder der Basisvektoren von  $V$ .

Zu (a): Aus der Bedingung  $\varphi_1(b_k) = (2 - k)b_k, k = 1, \dots, n$  folgt, dass die Darstellungsmatrix wie folgt aussieht:

$$M_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 2 - n \end{pmatrix}$$

Bis auf die Einträge auf der Hauptdiagonalen sind alle Einträge 0. Ein Eintrag auf der Hauptdiagonalen ist 0. Somit ist die Determinante von  $M_{\varphi_1}$  gleich 0, d.h. die Matrix ist nicht invertierbar, was gleichbedeutend dazu ist, dass  $\varphi_1$  nicht invertierbar ist.

Zu (b): Aus der Bedingung  $\varphi_2(b_k) = b_{k+1}, k = 1, \dots, n - 1$  und  $\varphi_2(b_n) = b_2$  folgt, dass die erste Spalte der Darstellungsmatrix mit ihrer  $n$ -ten Spalte übereinstimmt. Also hat die Matrix keinen vollen Rang und ist daher nicht invertierbar.

Zu (c): Aus der Bedingung  $\varphi_3(b_k) = (2 + k)b_k, k = 1, \dots, n$  folgt, dass die Darstellungsmatrix nur Einträge ungleich Null auf der Hauptdiagonalen hat und alle anderen Einträge sind Null. Ihre Determinante ist also ungleich Null, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Zu (d): Aus der Bedingung  $\varphi_4(b_k) = b_{k+1}, k = 1, \dots, n - 1$  und  $\varphi_4(b_n) = b_1$  folgt, dass die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix linear unabhängig sind, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Zu (e): Aus den Bedingungen  $\varphi_5(b_1) = b_2, \varphi_5(b_k) = 3b_k + b_{k+1}, k = 2, \dots, n - 1$  und  $\varphi_5(b_n) = b_n$  folgt, dass die Darstellungsmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist. Die Einträge der Hauptdiagonalen von oben links nach unten rechts gelesen sind  $0, 3, 1, 1, \dots, 1$ . Also ist die Determinante Null und die Matrix ist nicht invertierbar.

Zu (f): Die Bedingungen  $\varphi_6(b_1) = b_1$  und  $\varphi_6(b_k) = k \cdot b_k - k^2 \cdot b_{k-1}, k = 2, \dots, n$  liefern eine Darstellungsmatrix, die eine obere Dreiecksmatrix ist. Überdies sind alle Einträge auf der Hauptdiagonalen ungleich Null, d.h. die Matrix ist invertierbar.

### Aufgabe 10

Wir verweisen auf die Vorbemerkung zur Aufgabe 9. Aus den Bedingungen  $\varphi(b_i) = 2b_i + b_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$  und  $\varphi(b_n) = b_n$  folgt, dass die Darstellungsmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist: Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind 2 bis auf den letzten Eintrag unten rechts – dieser ist 1. (Direkt unterhalb der Hauptdiagonalen sind alle Einträge 1.) Demnach gilt  $\det \varphi = 2^{n-1}$ .

### Aufgabe 11

Diese Aufgabe ist eine Variation der Aufgabe 7. Gegeben sei  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch  $\varphi((x, y, z)) = (y, 2x - z, x)$ . Die Darstellungsmatrix  $M_{\mathcal{A}}$  bezüglich einer nicht näher spezifizierten Basis  $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$  ist dann gegeben durch

$$M_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn

$$M_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x - z \\ x \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun  $M_{\mathcal{B}}$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Situation wird durch das folgende Diagramm beschrieben

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\mathcal{A}}^3 & \xrightarrow{T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}} & \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^3 \\ M_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow M_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{R}_{\mathcal{A}}^3 & \xrightarrow{T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}} & \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^3 \end{array}$$

Es gilt daher

$$M_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Die Transformationsmatrix  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$  ist in diesem Fall leicht ermittelt. Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertieren von  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$  liefert

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 12

Wir wählen  $K = V = W = \mathbb{R}$  und betrachten  $f(x) = x$  und  $g(x) = -x$ . Dann gilt  $\dim V = \dim W = 1$ ,  $\text{Rang}(f) = 1 = \text{Rang}(g)$  und  $\text{Rang}(f + g) = 0$ . Dieses Beispiel dient als Nachweis, dass die folgenden Aussagen falsch sind:

- (a)  $\text{Rang}(f + g) \geq \text{Rang}(f)$
- (b)  $\text{Rang}(f + g) = \text{Rang}(f) + \text{Rang}(g)$
- (d)  $\text{Rang}(f + g) \geq \text{Rang}(f) + \text{Rang}(g)$
- (e)  $\text{Rang}(f + g) \geq \dim W$

Für eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  gilt, dass  $\text{Rang}(f) \leq \dim V$ : Die Dimension des Bildraumes kann nicht größer sein als die Dimension des Urbildraumes. Dies gilt natürlich auch für die lineare Abbildung  $(f + g) : V \rightarrow W$ , also ist die nachfolgende Aussage wahr:

$$(f) \quad \text{Rang}(f + g) \leq \dim V.$$

Alternativ können wir auch mit der Dimensionsformel argumentieren: Es gilt

$$\dim V = \dim \ker(f + g) + \text{Rang}(f + g) \Rightarrow \dim V \geq \text{Rang}(f + g).$$

Auch die Aussage (c) ist wahr – es gilt

$$\text{Rang}(f + g) \leq \text{Rang}(f) + \text{Rang}(g).$$

Sei  $w \in \text{im}(f + g)$ . Dann existiert ein  $v \in V$  mit  $(f + g)(v) = w$ , d.h.  $f(v) + g(v) = w$ . Es gilt  $f(v) \in \text{im}(f)$  und  $g(v) \in \text{im}(g)$ , d.h.  $f(v)$  lässt sich als Linearkombination einer Basis  $\mathcal{A}$  von  $\text{im}(f)$ . Analog lässt sich  $g(v)$  als Linearkombination einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $\text{im}(g)$  darstellen. Folglich lässt sich jedes  $w \in \text{im}(f + g)$  als Linearkombination aller Vektoren aus  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  darstellen, d.h. die Basislänge von  $\text{im}(f + g)$  ist kleiner oder gleich der Summe der Basislängen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ , mit anderen Worten

$$\text{Rang}(f + g) \leq \text{Rang}(f) + \text{Rang}(g).$$

### Aufgabe 14

Zu (a), (e) und (f):

Es sei  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  mit  $\text{Rang}(\varphi) = 3$ . Dann ist  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bijektiv. Daher ist auch  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$  bijektiv, d.h.  $\text{Rang}(\varphi^2) = 3$ . Somit können die Folgen  $(3, 2, 2, 1)$  und  $(3, 2, 1, 0)$  für  $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4))$  für kein  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  auftreten. Hingegen kann  $(3, 3, 3, 3)$  auftreten (in diesem Fall können wir beispielsweise  $\varphi = \text{id}$  wählen).

Zu (b):

Angenommen,  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  mit  $\text{Rang}(\varphi) = 1$ , dann ist  $\dim \ker \varphi = 2$ . Somit ist  $\dim \ker \varphi^2 \geq 2$  (denn  $\ker \varphi$  liegt stets in  $\ker \varphi^2$  (warum gilt das?)), d.h.  $\text{Rang}(\varphi^2) \leq 1$ . Daher gibt es kein  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  mit  $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4)) = (1, 2, 1, 0)$ .

Zu (c):

Sei  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  mit Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dann gilt  $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4)) = (2, 1, 0, 0)$ .

Zu (d):

Sei  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  mit  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, 0, 0)$ .

Dann gilt  $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4)) = (1, 1, 1, 1)$ .

### Aufgabe 15

Zu (e): Wir betrachten eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diese Abbildung kann nicht injektiv sein, da der Urbildraum 4-dimensional und der Bildraum höchstens 3-dimensional ist. Also ist die Aussage „ $f$  ist injektiv“ stets falsch. Aus einer falschen Aussage können wir *alles* folgern, insbesondere auch, dass  $f(x) = (1, 1, 2)$  eine Lösung in  $\mathbb{R}^4$  besitzt. Insofern muss (e) als richtige Antwort mitangekreuzt werden. Aber: Betrachten wir hingegen eine lineare Abbildung  $\hat{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so kann die Aussage „ $\hat{f}$  ist injektiv“ wahr sein. Diese Bedingung ist dann aber *nicht* hinreichend, dass  $\hat{f}(x) = (1, 1, 2)$  eine Lösung besitzt!

Zu (a): Die Bedingung  $\dim \ker f = 2$  bedeutet (mit der Dimensionsformel), dass  $\dim \text{im} f = 1$ , also ist  $f$  nicht surjektiv, d.h. es gibt nicht notwendigerweise ein  $x \in \mathbb{R}^4$  mit  $f(x) = v$ .

Zu (b): Gleiches Argument wie in (a).

### Aufgabe 16

Sei  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ . Hinsichtlich der Standardbasis gilt dann

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 E_{11} + x_2 E_{12} + x_3 E_{21} + x_4 E_{22}. \end{aligned}$$

Ferner gilt für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , dass

$$\gamma_A(X) := AXA^t = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_1 \\ 2x_1 & 4x_1 \end{pmatrix} = x_1E_{11} + 2x_1E_{12} + 2x_1E_{21} + 4x_1E_{22}.$$

Wir erhalten daher

$$\gamma_A(E_{11}) = 1E_{11} + 2E_{12} + 2E_{21} + 4E_{22}$$

$$\gamma_A(E_{12}) = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$\gamma_A(E_{21}) = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$\gamma_A(E_{22}) = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}.$$

Die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung entsprechen den Bildern der Basisvektoren. Somit ist die gesuchte Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$