Behauptung: Die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \binom{k}{3} \frac{1-5^{-k}}{k!k}$$

konvergiert absolut.
Beweis: Für $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gilt

$$\binom{k}{3} \frac{1-5^{-k}}{k!k} = \frac{k!}{3!(k-3)!} \cdot \frac{1-5^{-k}}{k!k} = \frac{1-5^{-k}}{6k(k-3)!} = \frac{1}{6k(k-3)!} - \frac{1}{5^k 6k(k-3)!}.$$

Die folgende Ungleichungskette

$$k^2 < 6k(k-3)! < 5^k 6k(k-3)!$$

gilt offenbar für $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt daher

$$\frac{1}{k^2} > \frac{1}{6k(k-3)!} > \frac{1}{5^k 6k(k-3)!},$$

also gilt

$$\sum_k \frac{1}{k^2} > \sum_k \frac{1}{6k(k-3)!} > \sum_k \frac{1}{5^k 6k(k-3)!}.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum\limits_k \frac{1}{k^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergieren daher auch $\sum\limits_k \frac{1}{6k(k-3)!}$ und $\sum\limits_k \frac{1}{5^k 6k(k-3)!}$. Mithin konvergiert

$$\sum_k \left[\frac{1}{6k(k-3)!} - \frac{1}{5^k 6k(k-3)!} \right] = \sum_k \binom{k}{3} \frac{1-5^{-k}}{k!k}.$$

Da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{5^k} < 1$, ist $1 - 5^{-k} > 0$. Somit gilt

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left| \binom{k}{3} \frac{1-5^{-k}}{k!k} \right| = \sum_{k=3}^{\infty} \binom{k}{3} \frac{1-5^{-k}}{k!k},$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut.