



Blatt 3

Aufgabe 12

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$
$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{falls } x \neq 2 \\ A \text{ mit } A \in \mathbb{R}, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Aufgabe 13

Die Funktion f sei stetig in $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $|f|$ stetig in a ist. Folgern Sie hieraus: Es seien f und g stetig in a . Dann sind auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ stetig in a .

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass die Dirichletsche Sprungfunktion $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nirgends stetig ist.

Aufgabe 15

Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie: Wenn f Lipschitz-stetig ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

(b) Zeigen Sie: Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann ist f auch stetig.

Aufgabe 16

Es sei $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{-x} & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit. Beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen.