



Blatt 4

Aufgabe 17

(a) Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$. Zeigen Sie:

$$\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b} < \sqrt[k]{a-b}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) und zeigen Sie:
Die Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \sqrt{x}$$

ist gleichmäßig stetig. Ist g auch Lipschitz-stetig?

Aufgabe 18

Hat die folgende Gleichung

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^4 + 1}} = x.$$

eine Lösung in \mathbb{R} ? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 19

Es konvergiere die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls (fast) alle f_n stetig sind, so ist auch f stetig.

Zusatzaufgabe 1

- (a) Geben Sie eine reelle Folge an, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.
- (b) Geben Sie eine Reihe an, die gegen 2 konvergiert.
- (c) Geben Sie eine Reihe an, die konvergiert, so dass keine absolute Konvergenz vorliegt.
- (d) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die keine Regelfunktion ist.

bitte wenden

Zusatzaufgabe 2

Kreuzen Sie an, welche Aussagen wahr bzw. falsch sind. Für jede korrekte Antwort gibt es 0,5 Punkte. Für jede nicht korrekte Antwort gibt es 0,5 Punkte Abzug. Sie können nicht weniger als 0 Punkte für diese Aufgabe erhalten.

Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < c$ und $b < d$ gilt
 $|a - b| < |c - d|$. wahr falsch

Jede konvergente Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt. wahr falsch

Jede Cauchy-Folge $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ hat einen Grenzwert in \mathbb{Q} . wahr falsch

Falls die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. wahr falsch

Für $|x| < 1$ hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ den Grenzwert $\frac{1}{1-x}$. wahr falsch

Jede stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch differenzierbar. wahr falsch

Für jede differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
und jedes $a \in D$ gilt: $f'(a) = 0 \Rightarrow a$ ist Extremstelle von f wahr falsch

Jede stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch eine Regelfunktion. wahr falsch

Zusatzaufgabe 3

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion zwischen zwei Mengen X und Y .

- Geben Sie die Definition für „ f ist injektiv“ an. Verneinen Sie im Anschluss die Aussage „ f ist injektiv“.
- Geben Sie die Definition für „ f ist surjektiv“ an. Verneinen Sie im Anschluss die Aussage „ f ist surjektiv“.