Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2018
Dr. D. Huynh

Blatt 6

Aufgabe 25

Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektoraum, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

(b) $U_1 + U_2 := \{x + y | x \in U_1, y \in U_2\}$ ist ein Untervektorraum von V.

(c) Für Untervektorräume U, U' von V gilt

- $U + U = U$
- $U + \{0\} = U$
- $U \subseteq U + U'$
- $U + U' = U \Leftrightarrow U' \subseteq U$.

Aufgabe 26

Bestimmen Sie ein Komplement U' zum Untervektorraum

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 27

Es seien V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum und $v, v' \in V$. Zeigen Sie

(a) $v + U = v' + U \Leftrightarrow v - v' \in U$.

(b) Die Skalarmultiplikation des Quotientenvektorraums V/U gegeben durch

$$\begin{aligned} K \times V/U &\to V/U \\ \alpha(v + U) &\mapsto \alpha v + U \end{aligned}$$

ist wohldefiniert.

Aufgabe 28

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Vektorräume (bzw. Korollar 8.1.10)

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Aufgabe 29

Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{C} \\ \sum_{j=0}^{n} a_j X^j &\mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{i}^j \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker \varphi = (X^2 + 1)$. (Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit). Folgern Sie

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}.$$