Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2018
Dr. D. Huynh

Blatt 7

Aufgabe 30
Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(t) \in K[t]$ paarweise verschiedene Nullstellen hat.

Aufgabe 31
Es sei
$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -33 & 14 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie A^{10} (ohne Computereinsatz).

Aufgabe 32
Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $q_A(t)$. Zur Erinnerung: Das Minimalpolynom $q_A(t)$ ist das (eindeutig bestimmte) normierte Polynom kleinsten Grades mit der Eigenschaft $q_A(A) = 0 \in M_{n\times n}(K)$.

(b) Zeigen Sie, dass A nicht diagonalisierbar ist, aber trigonalisierbar.

(c) Trigonalisieren Sie die Matrix A.

Aufgabe 33
Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4). Sei $\varphi \in \mathrm{End(V)}$ mit
$$\varphi(v_i) = v_{i+1} \text{ für } i = 1, 2, 3, \varphi(v_4) = v_1.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_\varphi(\lambda)$ von φ.

(b) Zeigen Sie: Für $K = \mathbb{R}$ ist φ nicht trigonalisierbar. Für $K = \mathbb{C}$ ist φ diagonalisierbar. Für $K = \mathbb{F}_2$ ist φ trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar.

(c) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{C}$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von φ.

Aufgabe 34

(a) Begründen Sie, warum die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $A \in K^{n\times n}$ die Eigenwerte von A sind.

(b) Wie ist ein Skalarprodukt auf einen K-Vektorraum definiert?

(c) Was ist ein unitärer Vektorraum?

Aufgabe 35
Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle , \rangle$ gilt

(a) $\langle x+y, x-y \rangle = ||x||^2 - ||y||^2$

(b) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

Aufgabe 36
Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V$$

sei gegeben durch

$$\varphi((1,0,0)) = (1,1,1), \quad \varphi((0,1,0)) = (0,1,1), \quad \varphi((0,0,1)) = (1,0,0).$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von φ und Basen von $\ker \varphi$ und $\mathrm{im}\varphi$ an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{im}\varphi = \dim V.$$

(b) Berechnen Sie die Verkettung $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Welche Dimension haben Kern und Bild von ψ? Wie sieht φ^3 aus?

Aufgabe 37
Es seien

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen des $\mathbb{R}^3$.

(a) Es sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Welche Koordinaten hat v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

(b) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen. Wie lautet die darstellende Matrix $M(\varphi, \mathcal{A}, \mathcal{B})$?