

Übungsfragen Analysis

Aufgabe 1. (Je 2 Punkte) Was besagt

- (a) der Binomische Lehrsatz?
- (b) der Satz von Bolzano-Weierstraß?
- (c) der Zwischenwertsatz?
- (d) der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$2^n > n^3$$

und beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Aussage.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Bernoulli-Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_{> -1} : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Aufgabe 5. (Je 2 Punkte) Überprüfen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie im Grenzfall den Grenzwert an

$$(a) \quad a_n := (-1)^n \quad (b) \quad a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Aufgabe 6. (4 Punkte) Zeigen Sie

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Aufgabe 7. (4 Punkte) Es sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x^2}$. Gegen welche Funktion f konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise?

Aufgabe 8. (Je 2 Punkte) Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an für

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos^2(x)$
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) \cdot \exp(x)$
- (c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \exp(x^2) + 3x$.