Behauptung: Für jeden K-Vektorraum V mit Untervektorräumen U und W gilt stets

$$V = U \oplus W \Rightarrow U \cong V/W.$$

Beweis: Sei $v \in V$. Wegen $U \oplus W = V$ gibt es (eindeutige) $u \in U$ und $w \in W$ mit $u + w = v$. Sodann definieren wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : V &\to U \\ v = u + w &\mapsto u. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offenbar surjektiv, d.h. $\mathrm{im}\varphi = U$. Ferner gilt $\ker \varphi = W$, denn für $v = 0 + w \in W$ gilt $\varphi(v) = 0$. Nach dem Homomorphiesatz gilt $V/\ker \varphi \cong \mathrm{im}\varphi$. Hier bedeutet dies gerade

$$V/W \cong U,$$

dies war zu zeigen.